

# La valorisation des polices-vie italiennes de type *gestione separata* : Problèmes théoriques et pratiques

S. Dang-Nguyen,  
Alef-Servizi S.p.a.,  
Telecom Bretagne / Lab-STICC.

*Séminaire de l'EURIA, Brest, 10 Janvier 2014*

## Introduction

- Etude des polices d'assurance vie italiennes de type *gestione separata*:
  - Des polices d'assurance-vie ...
  - ... avec indexation au rendement **comptable** d'un fonds (*gestione separata*).
- En particulier, il est nécessaire de :
  - Modéliser ces contrats.
  - Comprendre les risques liés, notamment le risque de crédit.
  - Obtenir leur prix de marché pour les calculs dans le cadre de *Solvency II*
- Cet exposé est organisé suivant trois points :
  - 1 Présentation des polices de type *gestione separata* :
    - Introduction.
    - Valorisation de ces contrats.
  - 2 Quelques problèmes théoriques de modélisation :
    - Les risques de marché et techniques.
    - La stratégie de gestion.
  - 3 Quelques problèmes pratiques :
    - L'estimation des paramètres des modèles affines.
    - Présentation de infrastructure d'évaluation.

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Introduction

- D’après l’IVASS<sup>1</sup>, l’autorité de contrôle italienne, au quatrième trimestre 2011 :
  - On dénombrait 386 fonds gérés par 70 sociétés liés à des polices réévaluées en Euros.
  - Leur composition est la suivante :

Type d’actif	Valeur	Pourcentage
Total obligations	267 863	87,73
Total titres de capital	10 183	3,33
Total titres de propriété	27 288	8,94
Total	305 334	100

Table 1: La composition des fonds dénommés en Euro au 31 Décembre 2011 (millions d’Euro, IVASS)

- **Majorité d’obligations** notamment de titres de l’état italien (166 511 millions d’Euros; 54,53 % du total; 62,16 % des obligations).
- Ces fonds contiennent aussi des titres (actions et obligations) en autres devises.
- Même conclusion pour les fonds dénommés en autres devises (total de 28 fonds).

---

<sup>1</sup> Polizze vita a prestazione rivalutabile in euro ed in valuta collegate a gestioni interne separate. Anno 2011 - Rilevazioni statistiche sui rendimenti e sulla composizione delle attività assegnate alle gestioni al quarto trimestre.

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Introduction

- Particularités réglementaires de ces fonds<sup>2</sup> :
  - Un **règlement** de gestion contient les éléments suivants (art. 6) :
    - La devise de référence, le type d'investissements autorisés, e.g. type de contrat, ainsi que les restrictions, par exemple les limites qualitatives et quantitatives.
    - Ce règlement est inclus dans les conditions contractuelles des polices associées.
  - La valeur du fonds ne doit pas être inférieure à la valeur des réserves des polices associées (art. 8).
  - Les ressources du fonds sont investies dans des activités admissibles pour la couverture de réserves (art. 9).
    - Les opérations de sortie sont effectuées pour réaliser les plus/moins-values.
    - Les pertes et profits restent virtuels jusqu'à la vente du titre.
  - Sa composition et son rendement sont **certifiés** par un expert comptable agréé (art. 11) et **publiés** (art. 13).
  - La société tient un **livre de comptes** spécifique au fonds (art. 12).

---

<sup>2</sup>Regolamento n. 38 del 3 Giugno 2011. Regolamento concernente la costituzione e l'amministrazione delle gestioni separate delle imprese che esercitano l'assicurazione sulla vita, ai sensi dell'articolo 191, comma 1, lettera e), del decreto legislativo 7 settembre 2005, n. 209 - Codice delle assicurazioni private.

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Introduction

– Le calcul du rendement **comptable** pour réévaluer les prestations et primes (art. 7) :

Le rendement lors du  $k$ -ième exercice, noté  $I_k$ , est le rapport entre le résultat financier et le revenu temporellement pondéré pour une période d'observation donnée :

$$I_k = \frac{I^{A^*}(k-1, k) - E^{A^*}(k-1, k)}{\overline{G^{A^*}}(k, k-1)} \quad (1)$$

où :

- $I^{A^*}(k-1, k)$  : Revenus entre les années  $k-1$  et  $k$  du fonds évalués selon leur valeur comptable. Flux “naturels”, e.g. coupons et dividendes, mais aussi des plus/moins values lors de changement de la composition du fonds.  
→ La valeur comptable intervient lors de ces dernières opérations.
- $E^{A^*}(k-1, k)$  : Dépenses liées au fonds (frais de gestion et certification), e.g. un pourcentage de leur valeur comptable.
- $\overline{G^{A^*}}(k, k-1)$  : *Giacenza media* ou revenu temporellement pondéré du fonds :

$$\overline{G^{A^*}}(k, k-1) = \mathcal{V}^{A^*}(k-1; \Pi_{k-1}) + \sum_{u=1}^{12} \omega_u^{A^*} \frac{k - \tau_u}{k - (k-1)} \quad (2)$$

avec  $\mathcal{V}^{A^*}(k-1; \Pi_{k-1})$  la valeur comptable précédente et  $\omega_u^{A^*}$  l'accroissement net du fonds lors du mois  $u$ .

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Modélisation et *pricing*

- On utilise un cadre de modélisation inspiré de *De Felice et Moriconi* [DFM-05] :
  - Le *pay-off* de la police a la forme générale suivante :

$$\Pi^{\check{C}} = \sum_{t=0}^{T_{\infty}^{\check{C}}} \Pi_t^{\check{C}} = \sum_{t=0}^{T_{\infty}^{\check{C}}} \left( -B_t^{\check{C}} \mathbb{I}_{\{B_{E_t}^{\check{C}}=1\}} + P_t^{\check{C}} \mathbb{I}_{\{P_{E_t}^{\check{C}}=1\}} \right) \quad (3)$$

où  $T_{\infty}^{\check{C}}$  est la durée maximale du contrat,  $B_t^{\check{C}}$  ( $P_t^{\check{C}}$ ) sont les prestations (primes) aléatoires en  $t$  et les variables aléatoires  $\mathbb{I}_{\{B_{E_t}^{\check{C}}=1\}}$  ( $\mathbb{I}_{\{P_{E_t}^{\check{C}}=1\}}$ ) modélisent le déclenchement du paiement des prestations (primes) en fonction de l'état de l'évènement assuré.

- On suppose que l'on peut décomposer l'évènement assuré en plusieurs **évènements élémentaires indépendants** :

$$\Pi_t^{\check{C}} = \sum_{e=1}^{N^{\check{C},e}(t)} \Pi_t^{\check{C},e} = \sum_{e=1}^{N^{\check{C},e}(t)} \left( -B_t^{\check{C},e} \mathbb{I}_{\{B_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} + P_t^{\check{C},e} \mathbb{I}_{\{P_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} \right) \quad (4)$$

avec  $N^{\check{C},e}(t)$  le nombre d'évènements élémentaires indépendants en  $t$  et les notations sont transposées pour les évènements indépendants.

→ On s'intéresse au prix d'un **contrat élémentaire** du fait des sommes de (3) et (4).

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Modélisation et *pricing*

- On utilise un cadre de modélisation inspiré de *De Felice et Moriconi* [DFM-05] (suite) :
  - On écrit la prestation (et la prime) élémentaire sous la forme :

$$B_t^{\check{C},e} = B_t^{\check{C},e,b} \Phi^{\check{C},B,e} (I_t, 0, t) \quad (5)$$

où  $B_t^{\check{C},e,b}$  est la prestation (prime) non réévaluée et  $\Phi^{\check{C},B,e} (I_t, 0, t)$  est le coefficient de réévaluation.

→ D'un point de vue fonctionnel, les incertitudes financières et actuarielles sont **séparées**.

- Le coefficient de réévaluation a la forme :

$$\Phi^{\check{C},B,e} (\mathbf{I}_{0:t}, 0, t) = \prod_{k=1}^t [1 + \varpi (I_k)] \quad (6)$$

$$\varpi (I_k) = \frac{\max \{ \min \{ \xi_k I_k; I_k - \eta_k \} - i_k; \underline{\delta}_k \}}{1 + i_k} \quad (7)$$

avec  $i_k$  est le taux technique actuariel,  $\xi_k$  le coefficient de participation,  $\eta_k$  le rendement retenu,  $\underline{\delta}_k$  le taux garanti et  $I_k$  le rendement du fonds donné par (1).

→ La présence de la garantie **décompose** le contrat en composante garantie et option *call* (bonus) ou en un investissement risqué et option *put* (protection).

→ Ces deux options sont de type *path-dependent*.

→ La stratégie de gestion **agit** sur le rendement donc elle doit être modélisée.

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Modélisation et *pricing*

– On détermine le prix de marché du contrat élémentaire :

En suivant *De Felice et Moriconi* [DFM-05], la valeur du contrat s'écrit :

$$\mathcal{V}^M \left( 0; \Pi_t^{\check{C},e} \right) = \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P}} \Pi_t^{\check{C},e} \middle| \mathcal{A}_0 \right] \quad (8)$$

avec  $\mathcal{D}_t^{\mathbb{P}}$  le déflateur,  $\mathcal{A}_0$  une filtration suffisamment riche et  $\mathbb{P}$  est la mesure de probabilité historique.

En supposant que les risques techniques et financiers sont **indépendants**, le déflateur s'écrit :

$$\mathcal{D}_t^{\mathbb{P}} = \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},F} \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T} \quad (9)$$

où  $\mathcal{D}_t^{\mathbb{P},F}$  est le déflateur financier et  $\mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T}$  est le déflateur relatif aux risques techniques. De plus la filtration est décomposée en deux filtrations dont les éléments  $\mathcal{F}_0$  et  $\mathcal{T}_0$  collectent respectivement l'information financière et technique. En combinant (5) et (9), le prix devient donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^M \left( 0; \Pi_t^{\check{C},e} \right) &= -B_t^{\check{C},e,b} \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},F} \Phi^{\check{C},B,e} (I_t, 0, t) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T} \mathbb{I}_{\{B_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] \\ &\quad + P_t^{\check{C},e,b} \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},F} \Phi^{\check{C},P,e} (I_t, 0, t) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T} \mathbb{I}_{\{P_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] \end{aligned} \quad (10)$$

→ On doit déterminer le prix de deux **composantes financières** et **techniques**.



## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Modélisation et *pricing*

– On s'intéresse à la composante financière :

On supposant que le marché financier est **parfait**, la mesure de probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  existe et satisfait :

$$\mathcal{V}^M(0; \tilde{\Pi}) = \mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},F} \tilde{\Pi} \middle| \mathcal{F}_0 \right] = \mathcal{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{Q},F} \tilde{\Pi} \middle| \mathcal{F}_0 \right] \quad (11)$$

pour un *pay-off*  $\tilde{\Pi}$ . On suppose qu'il existe un processus modélisant le **taux spot**, noté  $r(\cdot)$ . Le déflateur financier sous la mesure risque-neutre est donc :

$$\mathcal{D}_t^{\mathbb{Q},F} = \exp \left( - \int_0^t r(u) du \right) \quad (12)$$

– On s'intéresse à la composante technique :

Les marchés ne sont pas aussi liquides donc on ne peut pas observer les primes de risque de marché. Cependant, on **suppose qu'il existe une mesure**  $\mathbb{D}$  (Cf. [DFM-05] et références fournies) telle que le déflateur relatif aux risques techniques satisfasse :

$$\mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T} \middle| \mathcal{T}_0 \right] = 1 \quad (13)$$

La composante technique est donc :

$$\mathcal{E}^{\mathbb{P}} \left[ \mathcal{D}_t^{\mathbb{P},T} \mathbb{I}_{\{B_{E_t^{\check{C}},e}=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] = \mathcal{E}^{\mathbb{D}} \left[ \mathbb{I}_{\{B(E_t^{\check{C}})=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] \quad (14)$$

## 1. Présentation des polices de type *gestione separata* : Modélisation et *pricing*

– D’après (11) et (14), le prix du contrat élémentaire s’écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^M \left( 0; \Pi_t^{\check{C},e} \right) = & -B_t^{\check{C},e,b} \mathcal{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_0^t r(u) du \right) \Phi^{\check{C},B,e} (I_t, 0, t) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \mathcal{E}^{\mathbb{D}} \left[ \mathbb{I}_{\{B_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] \\ & + P_t^{\check{C},e,b} \mathcal{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_0^t r(u) du \right) \Phi^{\check{C},P,e} (I_t, 0, t) \middle| \mathcal{F}_0 \right] \mathcal{E}^{\mathbb{D}} \left[ \mathbb{I}_{\{P_{E_t}^{\check{C},e}=1\}} \middle| \mathcal{T}_0 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

→ Les risques techniques sont décrits par des **probabilités** adéquates.

→ Les composantes techniques et financières sont réinterprétées comme le prix d’une obligation sans coupon, notés  $u^{\Phi^{\check{C},B,e}}(0, t)$  et  $u^{\Phi^{\check{C},P,e}}(0, t)$ , contenant la réévaluation et de **flux probabilisés**,  $B_t^{\check{C},e,b} {}_t p_B$  et  $P_t^{\check{C},e,b} {}_t p_P$ . On reformule donc le prix sous la forme :

$$\mathcal{V}^M \left( 0; \Pi_t^{\check{C},e} \right) = -B_t^{\check{C},e,b} {}_t p_B u^{\Phi^{\check{C},B,e}}(0, t) + P_t^{\check{C},e,b} {}_t p_P u^{\Phi^{\check{C},P,e}}(0, t) \quad (16)$$

→ Approche dans le cadre du *NUMAT* de *Bühlman* [B-02].

– Du fait de l’indépendance des évènements élémentaires, le prix de la police, dont le *pay-off* est donné par (3), est une somme de prix d’éléments de type (16).

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

- Trois composantes qui influencent le prix du contrat donc les risques induits :
  - **Risques techniques** : Ils sont représentés dans les probabilités  ${}_t p_B$  et  ${}_t p_P$  de (16).
  - **Risques de marché** : Ils expliquent partiellement les prix de  $u^{\Phi^{\check{C},B,e}}$  et  $u^{\Phi^{\check{C},P,e}}$  de (16).
  - **Stratégie de gestion** : Elle intervient également dans les prix des obligations indexées de (16).
- Les risques techniques :
  - Les principaux risques techniques sont la **vie/décès** des assurés et la **suspension/retrait** d'une police.
  - Ils sont décrits par les **tables** basées sur un modèle stochastique sous-jacent :  
On suppose que les probabilités sont lognormales. On calibre les paramètres sur des probabilités estimées sur des données historiques.  
→ On peut aussi stresser les probabilités qui servent à construire les tables.
  - Alternativement, on peut utiliser des tables données.
- Les risques de marché :
  - Le taux sans risque joue un rôle **fondamental** dans la valorisation de tout contrat financier.
  - Les autres risques sont déterminés par les investissements **actuels** et **possibles**.  
→ La stratégie de gestion opère sur l'état simulé du marché.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

- Les modèles affines, e.g *Duffie et al.* [DFS-03] :
  - Le **taux au comptant** a la forme :

$$r(t) = r^{(0)} + r^{(1)'} X(t) \quad (17)$$

avec  $r^{(0)} \in \mathbb{R}$ ,  $r^{(1)} \in \mathbb{R}^d$  et  $X(t) = (X^1(t), \dots, X^d(t))$  un vecteur de facteurs.

- Les **facteurs** sont donnés par une équation différentielle stochastique :

$$dX(t) = K [\Theta - X(t)] dt + \Sigma \sqrt{S[X(t)]} dZ^{\mathbb{Q}}(t) \quad (18)$$

où  $Z^{\mathbb{Q}}(t)$  est un mouvement brownien de dimension  $d$ ,  $\Theta \in \mathbb{R}^d$ ,  $K, \Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $S[X] \in \mathbb{R}^{d \times d}$  est diagonale et son  $i$ -ème terme est  $[s(X)]_{i,i} = a^{(i)} + b^{(i)} X$  avec  $a^{(i)} \in \mathbb{R}$  et  $b^{(i)} \in \mathbb{R}^d$ .

→ **Restrictions** sur les paramètres afin de garantir l'existence de la solution de (18) avec la classification de *Dai* et *Singleton* [DS-00].

- Prime de risque de marché, e.g *Dai* et *Singleton* [DS-00].

On suppose que la prime de risque de marché a la forme :

$$q(X, t) = \sqrt{S[X(t)]} \pi \quad (19)$$

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Les modèles affines, e.g *Duffie et al.* [DFS-03] (suite) :

→ La dynamique des facteurs devient sous la mesure historique :

$$dX(t) = K^* [\Theta^* - X(t)] dt + \Sigma \sqrt{S[X(t)]} dZ^{\mathbb{P}}(t) \quad (20)$$

avec  $K^* = K - \Sigma \Psi_0$  et  $\Theta^* = (K^*)^{-1} (K\Theta + \Sigma \Psi_1)$  où la  $i$ -ème ligne de  $\Psi_0$  est  $\pi_i b^{(i)}$  et le  $i$ -ème élément de  $\Psi_1$  est  $\pi_i a^{(i)}$ .

• Le taux d'actualisation a la forme :

$$v(t, T) = \mathcal{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp \left[ \sum_{i=1}^d B^i(t, T) X^i(t) + C(t, T) \right] \quad (21)$$

avec  $B(t, T) = (B^1(t, T), \dots, B^d(t, T))$  et  $C(t, T)$  sont les solutions du **système différentiel** :

$$\begin{cases} dB(t, T)/dt = r^{(1)} + K' B(t, T) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d [\Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma']_{j,j} b^{(j)'} \\ dC(t, T)/dt = r^{(0)} - B(t, T)' K \Theta - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d [\Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma']_{j,j} a^{(j)} \end{cases} \quad (22)$$

→ Le rendement de l'obligation sans coupon est donc :

$$y(t, T) = \frac{-1}{T-t} \log [v(t, T)] = \frac{\sum_{i=1}^d -B^i(t, T) X^i(t) - C(t, T)}{T-t} \quad (23)$$

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

- Le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* [CIR-85] :
  - On pose  $d = 1$ ,  $a^{(1)} = 0$  et  $b^{(1)} = 1$ . L'équation différentielle stochastique (18) devient :

$$dr(t) = \alpha [\gamma - r(t)] dt + \sigma \sqrt{r(t)} dZ^{\mathbb{Q}}(t) \quad (24)$$

Les paramètres vérifient la condition de *Feller*  $2\alpha\gamma/\sigma^2 > 1$ , un cas particulier des restrictions de [DS-00].

- La distribution de transition conditionnelle est de type **chi-deux non-centrée**.
  - Le taux spot est **Q-presque sûrement positif**.
- On suppose que la prime de risque de marché a la forme :

$$q(r, t) = -\pi \frac{\sqrt{r(t)}}{\sigma} \quad (25)$$

→ Sous la mesure historique, le taux spot est donné par, e.g. *Brigo et Mercurio* [BM-06] :

$$dr(t) = \alpha^* [\gamma^* - r(t)] dt + \sigma \sqrt{r(t)} dZ^{\mathbb{P}}(t) \quad (26)$$

avec  $\alpha = \alpha^* - \pi$  et  $\alpha^*\gamma^* = \alpha\gamma$ .

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Les extensions à *shift* déterministe *Brigo* et *Mercurio* [BM-98] :

- Le taux spot est donné par :

$$r(t) = s(t) + \psi(t) \quad (27)$$

avec  $s(t)$  un processus unidimensionnel affine et  $\psi(t)$  une fonction **déterministe**.

- La distribution du taux spot est **déduite** de celle de  $s(t) \rightarrow$  *Pricing* de dérivés de taux.
- La **simulation** de la trajectoire du taux spot ajoute peu de complexité.
- Le taux d'actualisation est donné par :

$$v^{s,\psi}(t, T) := v^s(t, T) \exp \left( - \int_t^T \psi(u) du \right) \quad (28)$$

- **Fit** parfait de la courbe des taux observée sur les marchés [BM-98] :

$$v^{s,\psi}(t, T_i) = v^M(t, T_i) \Leftrightarrow \exp \left( - \int_t^{T_i} \psi(u) du \right) = \frac{v^M(t, T_i)}{v^s(t, T_i)} \quad (29)$$

Les maturités sont observées en nombre fini  $\rightarrow$  L'intégrale de  $\psi(t)$  est connue par morceaux  $\rightarrow$  **Hypothèses** additionnelles sur la forme de  $\psi(t)$ .

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

- Le modèle *Affine-Dynamic-Nelson-Siegel Christensen et al.* [CDR-11] :
  - On **spécifie** l'équation (18) pour que les rendements aient la forme de la **fonctionnelle d'interpolation** de *Nelson-Siegel* [NS-87]. On considère le processus  $\beta(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t))'$  qui a pour dynamique sous la mesure risque-neutre :

$$\begin{pmatrix} d\beta_0(t) \\ d\beta_1(t) \\ d\beta_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \Theta^0 \\ \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \end{pmatrix} \right] dt + \Sigma \begin{pmatrix} dZ^{\mathbb{Q},0}(t) \\ dZ^{\mathbb{Q},1}(t) \\ dZ^{\mathbb{Q},2}(t) \end{pmatrix} \quad (30)$$

et on suppose que le taux spot dépend uniquement des deux premiers facteurs :

$$r(t) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \quad (31)$$

- Le rendement de l'obligation sans coupon est donc :

$$y^{AFDNS}(t, T) = \beta_0(t) + \beta_1(t) \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} + \beta_2(t) \left[ e^{-\lambda\tau} - \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda\tau} \right] - \frac{1}{\tau} C(t, T) \quad (32)$$

avec  $\tau = T - t$ .

→ Le terme additionnel  $C(t, T)/(T - t)$  reflète l'**incompatibilité** entre les modèles affines (sans arbitrage) et le schema de *Nelson-Siegel*, démontré *Filipović* [F-99].



## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

- Le modèle *Affine-Dynamic-Nelson-Siegel Christensen et al.* [CDR-11] (suite) :
  - Comme les termes  $b^{(i)}$  de (18) sont nuls, la fonction  $B(t, T)$  dépend de  $K$  alors que la fonction  $C(t, T)$  dépend de  $\Theta$  et de la corrélation entre les facteurs avec la matrice  $\Sigma$ .
  - Si  $\Theta = 0$ , une formule **fermée** pour la fonction  $C(t, T)$  est disponible [CDR-11].
  - Forces et faiblesses du modèle :
    - + Il appartient à la classe des modèles affines  $\rightarrow$  Il existe de nombreuses méthodes de **pricing** (au pire *Monte-Carlo*).
    - + Les rendements sont données par *Nelson-Siegel* (et constante)  $\rightarrow$  **Variété** de courbes de taux.
    - $\beta_0$  et  $\beta_0 + \beta_1$  peuvent être négatifs  $\rightarrow$  Le rendement peut devenir **négatif**.
- Le modèle *Affine-Dynamic-Nelson-Siegel++ Dang-Nguyen et al.* [DNHLC-13a].
  - On applique un *shift* déterministe à l'équation (31).
  - Avantages des deux modèles: *Fit* parfait, possibilité de simuler la courbe des taux, formule fermée si  $\Theta = 0$ .
  - Le modèle peut se calibrer en minimisant le *shift*.
  - Un *shift* positif réduit mais n'annule pas la probabilité que les rendements soient négatifs.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Le risque de crédit :

- Les composants des modèles de risque de crédit sont: La probabilité de faillite, l'hypothèse de recouvrement et le taux sans risque :

$$D(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \left( \mathbb{I}_{\{\tau^F > T\}} + \delta^R \mathbb{I}_{\{\tau^F \leq T\}} \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (33)$$

- On utilise un **modèle à forme réduite** donc on modélise la probabilité de faillite au travers son processus d'intensité.
- On suppose qu'en cas de faillite, le débiteur reçoit une fraction de la valeur de marché de l'obligation. *Duffie et Singleton* [DS-99] montrent que le *spread* de crédit est le **produit** de l'intensité par la taux de recouvrement.
  - On modélise directement le *spread* de crédit.
- On utilise un **modèle affine** pour le *spread* de crédit en suivant *Duffie et Singleton* [DS-99].
  - Dépendance entre les facteurs qui contrôlent le taux sans risque et le *spread* de crédit.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Le risque de crédit (suite) :

• Le spread de crédit est donné par :

$$s^{(j)}(t) = \zeta_0^{(j)} + \sum_{i=1}^{N(j)} \zeta^{i/i-1}(t) \quad (34)$$

avec  $\zeta_0^{(j)}$  une constante et  $\zeta^{i/i-1}(t)$  le processus qui modélise la **différence** de *spread* entre la  $i - 1$ -ème  $i$ -ème classe de *rating*. Ce processus est de type *Cox-Ingersoll-Ross* :

$$d\zeta^{i/i-1}(t) = \alpha^{i/i-1} \left[ \gamma^{i/i-1} - \zeta^{i/i-1}(t) \right] dt + \sigma^{i/i-1} \sqrt{\zeta^{i/i-1}(t)} dZ^{D,i/i-1,\mathbb{Q}}(t) \quad (35)$$

Ces processus sont **indépendants**  $\rightarrow$  Les *spreads* sont **croissants** avec les classes de *rating*.

• On utilise la prime de risque de marché (25). Comme les facteurs sont indépendants, le prix d'une obligation de nominal  $N$  risquée a la forme :

$$D(t, T) = Nv(t, T) \exp \left( -\zeta_0^{(j)} (T - t) \right) \prod_{j=1}^{N(j)} v^{i/i-1}(t, T) \quad (36)$$

avec  $v^{i/i-1}(t, T)$  donné en utilisant le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross*.

$\rightarrow$  On suppose que le rating est **constant**, i.e.  $N(j)$  est constant.

•  $\zeta_0^{(j)}$  permet d'ajuster la valeur de modèle de l'obligation à la valeur de marché à l'instant initial de la simulation.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Questions ouvertes :

• Le choix d'**agrégation** :

Le quantile à 99.5% n'est pas trivial pour une distribution à plusieurs facteurs

→ On utilise la formule de *Solvency II*:

$$SCR(0; \Pi^I, \alpha, CR) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_R} \left( \Delta NAV_{SP,i/i-1}^{Up} \right)^2} \quad (37)$$

Chaque facteur indépendant est stressé indépendamment, on calcule la variation du surplus (actifs-passif).

On aurait pu aussi les stresser ensemble...mais comment? à quel niveau?

• Le **choix du modèle** : On a une forte cohérence mais le modèle *Cox-Ingersoll-Ross* est délicat à calibrer (monotone, pas de bosses)

→ Extension à *shift* déterministe ou modèles AFDNS(+++) plus flexibles

→ Calibration parfaite sur une courbe de taux (avec et sans risque).

Doit-on avoir une cohérence sur les classes de rating?

→ Si on utilise directement des *Cox-Ingersoll-Ross* pour chaque classe, en moyenne, on aura des *spreads* croissants mais pas sur toutes les trajectoires simulées.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : Les risques de marché

– Le prix des actions :

- On utilise le modèle de **Black-Scholes-Merton** [BM-73] :

$$\frac{dS^{(i)}(t)}{S^{(i)}(t)} = \mu_S^{(i)} dt + \sigma_S^{(i)} dZ^{S,i,\mathbb{P}}(t) \quad (38)$$

avec  $Z^{S,i,\mathbb{P}}(\cdot)$  un mouvement brownien sous la mesure  $\mathbb{P}$ .

→ Il faut estimer les corrélations entre les mouvements browniens et les simuler.

- Sous la mesure risque-neutre, le *drift* est le taux sans risque.
- Alternativement, on utilise un **benchmark**. Un *benchmark*, e.g. un indice, est caractérisé par :

$$\frac{dS^{(*)}(t)}{S^{(*)}(t)} = \mu_S^{(*)} dt + \sigma_S^{(*)} dZ^{S,*,\mathbb{P}}(t) \quad (39)$$

La volatilité du prix de l'action satisfait :

$$\left(\sigma_S^{(i)}\right)^2 = \left(\beta^{(i)}\right)^2 \left(\sigma_S^{(*)}\right)^2 + \epsilon^{\sigma,i} \quad (40)$$

où  $\epsilon^{\sigma,i}$  est une loi normale. Donc en supposant que le portefeuille est suffisamment diversifié :

$$\frac{dS^{(i)}(t)}{S^{(i)}(t)} = \mu_S^{(i)} dt + \beta^{(i)} \sigma_S^{(*)} dZ^{S,*,\mathbb{P}}(t) \quad (41)$$

→ On simule donc le *benchmark* et on en déduit les autres prix.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : La stratégie de gestion

- Les éléments comptables de la stratégie sont :
  - Le **portefeuille de polices** (et les charges induites) : Détermine les flux probabilisés.
  - Le(s) fonds de type *gestione separata* : Détermine le rendement des polices.
  - Un **fonds externe** : Contient le reste des actifs. Utilisé pour payer des prestations si nécessaire.
  - Un **fonds de liquidités** : Utilisé pour les flux financiers en entrée et sortie.
    - Si on utilise un seul fonds, sa valeur est nulle.
  - La **dette subordonnée** : En cas de besoin, la société peut émettre une dette subordonnée.
  - “Le **fonds des actionnaires**” : Enregistre les dividendes versés et les augmentations de capital requises. Sa valeur résiduelle en fin de simulation revient aux actionnaires.
    - Opérations mensuelles et certaines spécifiques au calcul du bilan.
- Logique **ALM** :
  - **Valeur totale des actifs** : Les fonds de type *gestione separata* + fonds externe + liquidités.
  - **Valeur totale des passifs** : Polices + charges induites par les polices + dette subordonnée.
    - On en déduit le surplus et le VBIF.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : La stratégie de gestion

### – La **couverture des flux financiers** :

Les polices et les actifs impliquent des flux; frais de la société.

- Si la valeur de marché du fonds est supérieure aux flux, on utilise le fonds de liquidités, le fonds externe et enfin le fonds de type *gestione separata*.
- Sinon, on vend les actifs et on emprunte la différence.

### – La **couverture des réserves** :

La valeur du fonds de type *gestione separata* doit être majeure à la valeur des réserves des polices associées. Si cette condition n'est pas vérifiée, on utilise le fonds de liquidités, le fonds externe et le fond des actionnaires.

### – La **stratégie de gouvernance** :

Contrôle le paiement de dividendes (augmentation du fonds des actionnaires), les augmentations de capital (diminution du fonds des actionnaires), la réduction ou l'augmentation de la dette subordonnée.

## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : La stratégie de gestion

– L'asset portfolio management :

Contrôle la composition du fonds de type *gestione separata*.

- **Asset allocation target** : Type de produits, pourcentage et éventuellement *duration*.
- **Opportunités d'investissement** : On simule des titres fictifs qui pourront être acquis/vendus.
- **L'objectif de rendement**, noté  $I_k^T$ , est défini au début de chaque année comptable au travers de deux bornes  $\underline{I}_k$  et  $\overline{I}_k$ :

$$\begin{cases} \underline{I}_k \leq I_k^T \leq \overline{I}_k & k = 1 \\ \mathcal{R} [\underline{I}_k, \underline{\alpha}, L(k, k + \underline{\tau})] \leq I_k^T \leq \mathcal{R} [\overline{I}_k, \overline{\alpha}, L(k, k + \overline{\tau})] & k = 2, \dots, T_\infty^{\check{C}} \end{cases} \quad (42)$$

avec  $\underline{\alpha}$  et  $\overline{\alpha}$  sont deux multiplicateurs de deux taux sans risque  $L(k, k + \underline{\tau})$  et  $L(k, k + \overline{\tau})$ ; la fonction  $\mathcal{R}(\cdot, \cdot, \cdot)$  a la forme :

$$\mathcal{R} [I_k, \alpha, L(k, k + \tau)] = \begin{cases} \max \{I_k, \alpha L(k, k + \tau)\} & k = 2, \dots, T_\infty^{\check{C}} \\ I_k + \alpha L(k, k + \tau) & k = 2, \dots, T_\infty^{\check{C}} \end{cases} \quad (43)$$

– On effectue trois opérations :

- Couverture des flux de caisse en vendant éventuellement des certains actifs.
- On modifie la composition du portefeuille pour atteindre l'*asset allocation target*.
- On réalise des plus/moins values pour atteindre le rendement objectif.



## 2. Quelques problèmes théoriques de modélisation : La stratégie de gestion

– Le flux de travail synthétique :

Chaque mois, le programme doit effectuer les opérations suivantes :

- Calcul des flux probabilisés (avant calcul élémentaire).
- Simulation de l'état du marché.
- Valorisation des actifs.
- Calcul des flux “naturels” des polices (prestations et primes).
- Calcul des flux “naturels” du fonds (dividendes, coupons).
- Calcul de la *giacenza media* (2).
- Application des opérations de couverture des flux et ajustement de la composition du portefeuille.
- Calcul du rendement du fonds, i.e. eq. (1) et ajustement du portefeuille pour atteindre le rendement.

A la date de fermeture du bilan, des opérations supplémentaires sont effectuées :

- Calcul du bilan et profits/pertes.
- Application de la stratégie de gouvernance.
- Vérification de la couverture des réserves.
- Calcul de l'objectif de rendement.

### 3. Quelques problèmes pratiques : L'estimation des paramètres du modèle

- L'estimation des modèles affines s'effectue selon le type de données disponibles :
  - Une série chronologique de la trajectoire des facteurs (observation directe) .
  - Un ensemble d'observations indirectes, e.g. rendements à une date donnée.
  - Une série chronologique d'observations indirectes.
- Une série chronologique d'observations directes  $\left\{ D_t^{(Obs,d)} \right\}_{t=1, \dots, N_T}$  :
  - On s'intéresse à la **densité de transition** entre deux observations  $\mathbb{P} \left( D_{t+1}^{(Obs,d)} \mid D_t^{(Obs,d)}; \theta, \delta_t, X \right)$ .
    - Pour certains modèles comme *Cox-Ingersoll-Ross*, elle est connue.
    - Sinon, on peut l'**approximer** :
      - + Avec la fonction caractéristique : On la calcule puis on l'inverse numériquement comme suggéré par *Duffie* et al. [DPS-00].
      - + La méthode de *Aït-Sahalia* : On effectue deux transformations, puis on utilise une approximation avec des polynômes de *Hermite* et on inverse les deux transformations, *Aït-Sahalia* [AS-99] (univarié) ou *Aït-Sahalia* et *Kimmel* [ASK-10] (multi-factoriel).
    - Une fois la densité de transition disponible, on calcule la **log-vraisemblance**:

$$\mathcal{L} \left( D^{(Obs,d)}; \theta \right) = \frac{1}{N_T} \sum_{t=1}^{N_T-1} \log \left[ \mathbb{P} \left( D_{t+1}^{(Obs,d)} \mid D_t^{(Obs,d)}; \theta, \delta_t, X \right) \right] \quad (44)$$

→ Les paramètres sont obtenus par maximisation de cet estimateur (sous la mesure **historique**).

### 3. Quelques problèmes pratiques : L'estimation des paramètres du modèle

- Une série chronologique d'observations directes  $\left\{ D_t^{(Obs,d)} \right\}_{t=1, \dots, N_T}$  (suite):
  - Cependant, dans le cadre de la modélisation de taux, on n'observe ni le taux au comptant ni ses facteurs.
    - Des auteurs suggèrent d'utiliser des *proxys*, e.g. taux à brève échéance.
- Un ensemble d'observations indirectes  $\left\{ D_t^{(Obs,i)} \right\}_{t=1, \dots, N_T}$  :
  - Appliqué dès les premiers travaux sur les modèles de taux, e.g. *Brown et Dybvig* [BD-86], *Barone et al.* [BCZ-91], *Brown et Schaefer* [BS-94] (*Cox-Ingersoll-Ross* univarié).
  - On **minimise une distance** entre les observations et les prix prédits.  
Par exemple, si on observe  $N_O$  rendements  $y^M(t, t + \tau_i)$  à une date  $t$  ( $N_T = 1$ ) de maturité  $\tau_i$ , on résout un problème de la forme:

$$\left( \hat{X}, \hat{\theta} \right) = \operatorname{argmin}_{X, \theta} \sum_{i=1}^{N_O} \varkappa_{\tau_i} \left[ y^M(t, t + \tau_i) - \left( \frac{-XB(t, t + \tau_i) - C(t, t + \tau_i)}{\tau_i} \right) \right]^2 \quad (45)$$

avec  $\varkappa_{\tau_i}$  le poids associé à la maturité  $\tau_i$ .

- Ce problème peut être **difficile** à résoudre numériquement: Plusieurs paramètres équivalents du point de vue de la distance mais différents lors des simulations.
- **Estimation** de la prime de risque de marché (*pricing* sous la mesure risque-neutre).

### 3. Quelques problèmes pratiques : L'estimation des paramètres du modèle

- Une série historique d'observations indirectes  $\left\{ D_t^{(Obs,i)} \right\}_{t=1, \dots, N_T}$  :
  - On construit un **système gaussien** en utilisant la dépendance affine entre les rendements et les facteurs.
  - + Equation de **transition** : On **approxime** la densité de transition par:

$$X(t+1) = \mathbf{S}_t X(t) + \mathbf{S}_t^C + \epsilon^X(t) \quad (46)$$

où  $\epsilon^X(t)$  est une variable gaussienne de moyenne nulle et de variance adaptée. Par exemple dans le cas du modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* univarié, on a:

$$X(t) = \exp(-\alpha^* \delta_t) X(t-1) + \gamma^* [1 - \exp(-\alpha^* \delta)] + \epsilon^X(t) \quad (47)$$

$\epsilon^X(t)$  est de moyenne nulle et de moment d'ordre 2  $\frac{\sigma^2}{2\alpha^*} [1 - \exp(-2\alpha^* \delta_t)] X(t-1)$

- + Equation d'**observation** :

$$D_t^{(Obs,i)} = \mathbf{O}_t X(t) + \mathbf{O}_t^C + \epsilon^O(t) \quad (48)$$

Les deux vecteurs  $\mathbf{O}_t$  et  $\mathbf{O}_t^C$  contiennent les coefficients et  $\epsilon^O(t)$  est un bruit gaussien.

- Avec le filtre de *Kalman*, on calcule la log-vraisemblance de la série  $\mathcal{L}(D^{(Obs,i)}; \theta)$ .
- On maximise la log-vraisemblance pour estimer les paramètres.

### 3. Quelques problèmes pratiques : L'estimation des paramètres du modèle

- Une série historique d'observations indirectes  $\left\{ D_t^{(Obs,i)} \right\}_{t=1, \dots, N_T}$  (suite) :
  - Cette méthode est appliquée dans de **nombreuses** références comme *Chen et Scott* [CS-03], *Geyer et Pichler* [GP-99] (*Cox-Ingersoll-Ross* multivariés), *Babbs et Nowman* [BN-98] (*Vasicek* bivarié), *De Jong et Santa-Clara* [DJSC-99] (modèles affines uni- et bi-variés), *De Jong* [DJ-00] (modèles affines de 1 à 3 facteurs) *etc.*
  - On peut aussi utiliser d'autres observations non affines donc des **extensions** du filtre de *Kalman*, *Claessens et Pennacchi* [CP-96] ou *Duffee* [D-99] ou des outils plus avancés, e.g. *De Rossi* [DR-10] applique un filtre à particules pour le modèle de *Cox-Ingersoll-Ross* univarié.
  - Dans la pratique, la maximisation de la vraisemblance est aussi **délicate** comme illustré par *Pas-salacqua* [P-06].
  - Dans [DNHLC-13b], on propose d'utiliser la divergence de *Kullback-Leibler*:
    - + On compare les **résidus** des équations de transition et d'observation (46) et (48) avec leur distribution théorique au travers de la divergence de *Kullback-Leibler*.
    - + On construit deux critères que l'on utilise pour **initialiser** l'algorithme lors d'une recherche par grille (extension: Optimisation multi-objectif). Puis on maximise la vraisemblance au tour de la solution trouvée.
    - + L'estimation de la prime de risque de marché reste **difficile**.

### 3. Quelques problèmes pratiques : Présentation de infrastructure d'évaluation

- La charge de calcul est **distribuée** en utilisant des calculs élémentaires :
  - Un fonds avec le portefeuille de polices associées.
  - Des conditions de marché.
  - Une stratégie de gestion.
    - On calcule les flux probabilisés puis on simule le marché et on applique la stratégie ALM.
- **Gains** induits par le calcul distribué *Castellani* et *Passalacqua* [CP-10] :
  - Société “A” : 5M de polices réduites à 0.35M polices effectives, i.e non distinguables. Environ 30 fonds, chacun ayant de quelques centaines à un million de polices.
  - Société “B” : 1M de polices réduites à 0.4M polices effectives et environ 30 fonds.Deux risques techniques et deux risques financiers, donc 480 calculs élémentaires. Simulation sur environ 100 ans avec un pas mensuel ou annuel.

Société	Société “A”		Société “B”	
Type de calcul	Distribué	Série	Distribué	Série
Mensuel	1h14	34h28	2h12	54h33
Annuel	0h43	17h45	0h31	11h31

Table 2: Les performances de DISAR [CP-10]

### 3. Quelques problèmes pratiques : Présentation de infrastructure d'évaluation

- On utilise le système *Dynamic Investment Strategy with Accounting Rules* (DISAR) :
  - Une **base de données** : Stocke l'information des actifs, passifs et marché.
  - Un **organisateur** (DISAR Master Server) : Gère et ordonne les calculs.
  - Des **moteurs** pour les calculs (DISAR Engine Service) : Moteur pour les calculs actuariels et financiers.
  - Une **interface** (DISAR Interface) : Permet de lancer et d'accéder aux résultats des calculs.

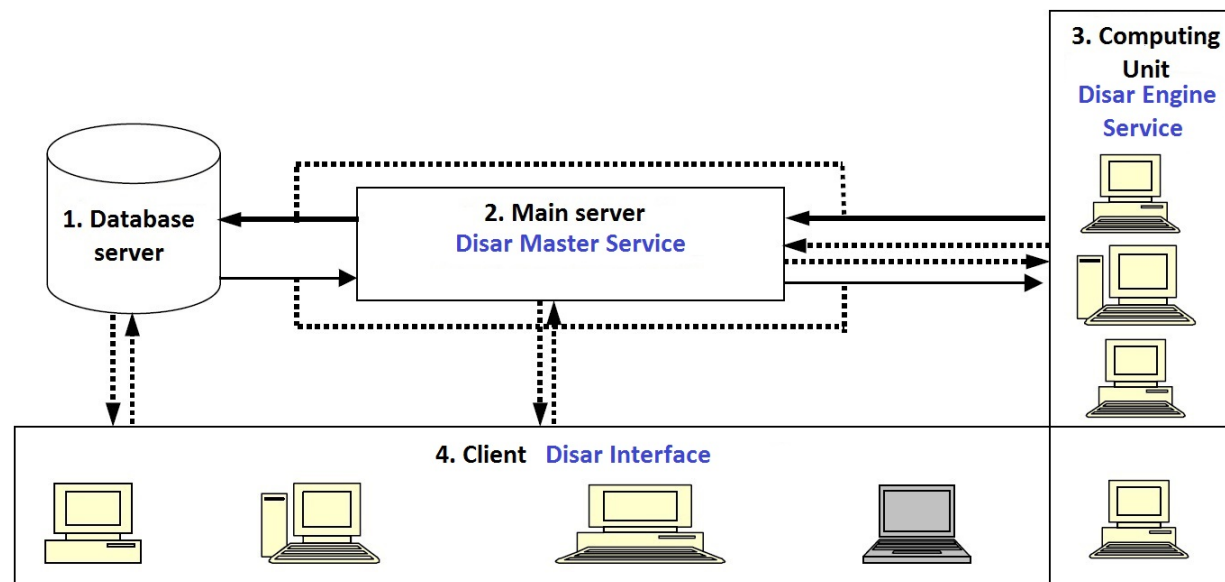


Figure 1: Le système DISAR

### 3. Quelques problèmes pratiques : Présentation de infrastructure d'évaluation

– Implémentation de DISAR :

- Base de données : Relational Database Management System, e.g. Oracle 11g. Au moins 2.0 GHz CPU (multi-coeur) et 16GB de RAM. Des calculs mensuels pour une société moyenne produisent environ 30GB de données sur un an.
- DISAR Master Server : Ecrit en C/C++/FORTRAN. Au moins 2.0 GHz CPU, 2GB de RAM et 50GB de mémoire. D'un point de vue logiciel, Java Runtime Environment version 7 ou plus avancé, un client RDBMS et un serveur FTP. Il contient également DISAR Consolidation Service qui regroupe tous les résultats des calculs élémentaires.
- DISAR Engine Service : Il a deux composantes DISAR Actuarial Engine (calcul des flux probabilisés) et DISAR ALM Engine (simulation du marché et stratégie de gestion) écrits en C/C++/FORTRAN. Au moins 2.0 GHz CPU mono ou multi coeur, 2GB de RAM (pour chaque coeur) et 10GB d'espace libre. D'un point de vue logiciel Java Runtime Environment 7 ou plus avancé, un Client RMDBS (pour accès direct à la base de données).
- DISAR Interface : Interface VBA Access. Un PC ordinaire (1 GB de RAM)

Les communications sont sécurisées par protocole Secure Sockets Layer/ Transport Layer Security.

→ Le système est implémentable sur les ressources informatiques **standard**.



## Bibliographie synthétique

- [AS-99] Y. Aït-Sahalia, *Transition Densities for Interest Rate and Other Nonlinear Diffusions*, Journal of Finance, 54(4):1361-1395 1999.
- [ASK-10] Y. Aït-Sahalia et R.L. Kimmel, *Estimating affine multifactor term structure models using closed-form likelihood expansions*, Journal of Financial Economics, 98:113-144, 2010.
- [BN-98] S.H. Babbs et K.B. Nowman, *An application of generalized Vasicek term structure models to the UK Gilt-edged market: A Kalman filtering analysis*, Applied Financial Economics, 8(6):637-644, 1998.
- [BCZ-91] E. Barone, D. Cuoco et E. Zautzik, *Term structure estimation using the Cox, Ingersoll and Ross model: The case of Italian treasury bonds*, Journal of Fixed Income, 1(3):87-95, 1991.
- [BM-73] F. Black et M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81(3):637-654, 1973.
- [BM-98] D. Brigo et F. Mercurio, *On deterministic-shift extensions of short-rate models*, Banca IMI, 1998.
- [BM-06] D. Brigo and F. Mercurio, *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer, 2006.
- [BD-86] S.J. Brown et P.H. Dybvig, *The empirical implications of the Cox, Ingersoll and Ross theory of the term structure of interest rates*, Journal of Finance, 41(3):617-630, 1986.
- [BS-94] R.H. Brown et S.M. Schaefer, *The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll and Ross model*, Journal of Financial Economics, 35(1):3-42, 1994.

## Bibliographie synthétique (suite)

- [B-02] H. Bühlmann, *New Math for Life Actuaries*, ASTIN Bulletin, 32(2):209-211, 2002.
- [CP-10] G. Castellani et L. Passalacqua, *Applications of Distributed and Parallel Computing in the Solvency II Framework: The DISAR system*, 16th International Euro-Par Conference, Ischia, Italy, 2010.
- [CS-03] R.R. Chen et L. Scott, *Multi factor Cox, Ingersoll and Ross models of the term structure: Estimates and tests from a Kalman filter model*, Journal of Real Estate Finance and Economics, 27(2):143-172, 2003.
- [CDR-11] J.H.E. Christensen, F.X. Diebold and G.D. Rudebusch, *The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models*, Journal of Econometrics, 164:4-20, 2011.
- [CP-96] S. Claessens et G. Pennacchi, *Estimating the likelihood of Mexican default from the market prices of Brady bonds*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 31(1):109-126, 1996
- [CIR-85] J.C. Cox, J.E. Ingersoll et S.A. Ross, *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica, 53(2):385-408, 1985.
- [DS-00] Q. Dai et K.J. Singleton, *Specification Analysis of Affine Term Structure Models*, Journal of Finance, 55(5):1943-1978, 2000.
- [DNHLC-13a] S. Dang-Nguyen, A. Hillion, et J-M. Le Caillec, *The deterministic shift extension and the affine dynamic Nelson-Siegel model*, soumis North American Journal of Economics and Finance, 2013.

## Bibliographie synthétique (suite)

- [DNHLC-13b] S. Dang-Nguyen, A. Hillion, et J-M. Le Caillec, *Calibration of the univariate Cox, Ingersoll and Ross model and parameters selection through the Kullback-Leibler divergence*, Document de travail, 2013.
- [DFM-05] M. De Felice et F. Moriconi, *Market based tools for managing the life insurance company*, ASTIN Bulletin, 35(1):79-111, 2005.
- [DR-10] G. De Rossi, *Maximum likelihood estimation of the Cox, Ingersoll and Ross model using particle filter*, Computational Economics, 36:1-16, 2010.
- [DJ-00] F. De Jong, *Time series and cross section information in affine term structure models*, Journal of Business and Economics Statistics, 18(3):300-314, 2000.
- [DJSC-99] F. De Jong et P. Santa-Clara, *The dynamics of the forward interest rate curve: A formulation with state variables*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 34(1):131-157, 1999.
- [DL-06] F.X. Diebold and C. Li, *Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields*, Journal of Econometrics, 130:337-364, 2006.
- [D-99] G.R. Duffee, *Estimating the price of default risk*, Review of Financial Studies, 12(1):197-226, 1999.
- [DFS-03] D. Duffie, D. Filipović et W. Schachermayer, *Affine Processes and Applications in Finance*, 13(3):984-1053, Annals of Applied Probability, 2003.

## Bibliographie synthétique (suite)

- [DPS-00] D. Duffie, J. Pan et K.J. Singleton, *Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-diffusions*, 68(6):1343-1376, *Econometrica*, 2000.
- [DS-99] D. Duffie et K.J. Singleton, *Modeling Term Structure of Defaultable Bonds*, 12(4):-687-720, *Review of Financial Studies*, 1999.
- [F-99] D. Filipović, *A Note on the Nelson-Siegel Family*, *Mathematical Finance*, 9(4):349-359, 1999.
- [GP-99] A. Geyer et S. Pichler, *A state-space approach to estimate and test multifactor Cox, Ingersoll and Ross models of term structure*, *Review of Finance*, 22(1):107-130, 1999.
- [NS-87] C.R. Nelson and A.F. Siegel, *Parsimonious Modelling of Yield Curves*, *Journal of Business*, 60(4):467-489, 1987.
- [P-06] L. Passalacqua, *A Kalman filter investigation of the Euro term structure within a multivariate Cox-Ingersoll-Ross framework*, proceedings of the XXX Convegno AMASES, Trieste, 2006.