

**Banque d'Épreuves des Concours des Écoles  
d'Actuariat et Statistique**

Session 2014

**Épreuve à option (C) : Économie**

Durée : 4h

---

### Exercice de Probabilités

---

Soit  $\{B_n \mid n \in \mathbb{N}^*\} = B_1, B_2, B_3, \dots$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi  $\mathcal{B}(p)$ , de Bernoulli de paramètre  $p$  :  $IP(B_n = 1) = p = 1 - IP(B_n = 0)$ .

Notons  $S_0 := 0$ , puis pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $S_n := B_1 + \dots + B_n$ .

Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}^*$ , notons  $N_\ell := \min\{n \in \mathbb{N} \mid S_n = \ell\}$  le premier entier  $n$  tel que  $S_n = \ell$ .

- 0) Quelle est la loi de  $S_n$  ?
- 1) Quelle est la loi de  $N_1$  ? préciser sa moyenne et sa variance.
- 2) Calculer  $IP(N_1 = j, N_2 = j + k)$ , pour  $j, k$  quelconques dans  $\mathbb{N}^*$ .
- 3) Déduire que  $N_2 - N_1$  est indépendante de  $N_1$ , et préciser sa loi.
- 4) Expliciter la loi de  $N_2$ .
- 5) Calculer l'espérance et la variance de  $N_2$ .

Fixons un entier  $\ell \geq 2$  pour les trois questions suivantes.

6) Pour tous  $j_1, \dots, j_\ell \in \mathbb{N}^*$ , expliciter à l'aide des variables  $B_1, \dots, B_{j_1 + \dots + j_\ell}$  l'événement  $\{N_1 = j_1\} \cap \{N_2 - N_1 = j_2\} \cap \dots \cap \{N_\ell - N_{\ell-1} = j_\ell\}$ , et en déduire sa probabilité.

- 7) Quelle est la loi de la variable aléatoire  $N_\ell - N_{\ell-1}$  ?
- 8) Que peut-on dire de la suite des variables aléatoires :  $N_1, N_2 - N_1, \dots, N_\ell - N_{\ell-1}$  ?
- 9) Calculer l'espérance et la variance de  $N_\ell$ , pour  $\ell$  quelconque dans  $\mathbb{N}^*$ .
- 10) Soient  $\ell, k$  quelconques dans  $\mathbb{N}^*$ . Exprimer l'événement  $\{N_\ell = k\}$  à l'aide de  $B_k$  et de  $S_{k-1}$ , puis calculer  $IP(N_\ell = k)$ .
- 11) Quel est le comportement de la suite  $N_\ell / \ell$ , lorsque  $\ell$  tend vers l'infini ?

---

### Exercice n° 1 d'optimisation économique

---

Soit un individu dont la fonction d'utilité est la suivante :  $U = XL_0$ , où  $X$  est la quantité consommée d'un bien composite de prix  $P$  et  $L_0$  est le nombre d'heures de loisir de l'individu. L'individu touche un salaire horaire  $W$  issu de son travail et perçoit en plus de celui-ci des revenus non salariaux (de capital)  $Y$  constants. L'état prélève un impôt sur les

revenus du travail ( $t_1$ ) ainsi qu'un impôt sur les revenus du capital ( $t_2$ ). On appelle  $L$  le nombre d'heures de travail offert ( $L + L_0 = 24$ ). On sait que  $Y = 12$ ,  $W = 3$  et  $P = 1$ .

1. Déterminez l'offre optimale de travail en absence d'impôt.
2. Déterminez l'offre optimale de travail lorsque le taux de prélèvement fiscal (sur les revenus salariaux et non salariaux) est de 33,33 %. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.
3. Déterminez l'offre de travail lorsque seul le travail est imposé au taux de 33,33%. Discutez l'impact de ce prélèvement sur l'offre de travail et le niveau d'utilité de l'agent.
4. Dans le dernier cas, décomposez l'effet global de la fiscalité en un effet substitution et un effet revenu, sachant que  $Y^* = 20,6$  est la solution de l'équation du second degré suivante :  $(Y^*)^2 + 96 Y^* - 2400 = 0$ . Discutez les résultats obtenus.

---

### Exercice n° 2 d'optimisation économique

---

Soit une économie à 3 agents (ménages, entreprises et État) représentée par les relations suivantes :  $T = T_0$ ,  $T$  étant la fonction d'imposition,

$C = C_0 + c_1 Y_d$ ,  $Y_d$  étant le revenu disponible après impôt et  $C$  la consommation,

$I = I_0$ ,  $I$  représentant l'investissement privé autonome des entreprises,

$G = G_0$ ,  $G$  représentant les dépenses publiques de l'État.

Les données sont les suivantes :  $G_0 = I_0 = c_0 = T_0 = 20$  ;  $c_1 = 0,8$ .

1. Déterminez la production (revenu) d'équilibre sur le marché des biens et services.
2. Supposons que l'État augmente ses dépenses de 10. Quel est l'effet de cette relance sur la production et le solde budgétaire ?
3. Sachant que la production de plein emploi est égale à 300, déterminez le montant de la relance budgétaire nécessaire pour atteindre le plein emploi si l'État poursuit de plus un objectif d'équilibre budgétaire.

On suppose à présent l'introduction d'un marché monétaire représenté par les équations suivantes :  $M^d = aY - bi$ ,  $M^d$  représentant la demande de monnaie,

$M^O = M^d$ ,  $M^O$  représentant l'offre réelle de monnaie de la Banque Centrale.

On suppose de plus que l'investissement privé des entreprises dépend du taux d'intérêt de la manière suivante :  $I = I_0 - gi$ ,  $i$  représentant le taux d'intérêt et  $g$  la sensibilité de l'investissement au taux. On suppose enfin que l'État instaure un impôt proportionnel, de

telle sorte que  $T = tY + T_0$ ,  $t$  étant le taux d'imposition et  $T_0$  le niveau d'imposition autonome.

4. Déterminez de manière littérale la production d'équilibre sur le marché des biens et services et sur le marché monétaire.

5. Déterminez de manière littérale l'effet d'une hausse du taux d'imposition sur la production d'équilibre.

---