

Calibration du choc de longévité dans le cadre de l'ORSA

Sterenn Actuariat : Conseil en Actuariat

Master 1 Euro-Institut Actuariat

| Taha BENABDELAZIZ |
Mohammed BENNOUNA | Fatou GUEYE

Bureau d'étude dirigé et supervisé par :

Responsables EURIA : Pauline SALAUN - *Membre du collège de direction,*
Françoise PÈNE - *Enseignante-chercheuse,* Franck VERMET - *Responsable des Études*
Responsable Professionnel : Anthony NAHELOU - *Actuaire consultant*



Département des Sciences et Techniques
UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE - EURIA
6 avenue le Gorgeu Brest - France

Mai 2016

Table des matières

1	La réforme Solvabilité II	2
1.1	Présentation de la réforme	2
1.1.1	Définition et objectifs de l'ORSA	4
1.1.2	La marge de solvabilité (SCR)	5
1.2	Le Risque de longévité	6
1.2.1	L'amélioration de la mortalité en Europe	7
1.2.2	Calcul du SCR de Longévité selon la formule standard	8
2	Étude UNESPA : Towers Perrin	10
2.1	Présentation du modèle :	10
2.1.1	Towers Perrin, Milliman, Modèles issus de l'industrie :	10
2.1.2	Contexte de l'étude :	11
2.2	Données utilisées :	11
2.3	Facteur d'amélioration de la mortalité :	12
2.3.1	Utilisation des tranches d'âges :	12
2.3.2	Calcul du facteur d'amélioration de la mortalité : . . .	12
2.4	Modèle stochastique : Projection de l'amélioration de la mor- talité.	13
2.5	Construction du choc de longévité :	14
3	Révision de l'étude :	17
3.1	Facteurs d'amélioration de la mortalité	17
3.1.1	Regroupement des tranches d'âges adéquates :	17
3.1.2	Calcul des facteurs d'amélioration de la mortalité : . .	19
3.1.3	Vérification de la normalité de l'échantillon	20
3.2	Calcul de la table de mortalité projetée :	21
3.2.1	Considération préalable :	21
3.2.2	Choix de la table de mortalité réglementaire :	22
3.2.3	Application du modèle stochastique :	22
3.2.3.1	Projection avec la TGH05 :	25
3.2.3.2	Projection avec la TH002 :	27
3.3	Calcul des chocs de mortalité :	29
3.3.1	Considérations préalable :	29

3.3.2	Détermination des chocs :	29
3.3.3	Algorithme de mise en œuvre :	30
3.3.4	Risk measure :	31
3.3.5	Résultat de la projection des chocs :	32
4	Calcul du capital de solvabilité requis (SCR) :	35
4.1	Le SCR : Une VaR à 99.5% :	35
4.2	Le Best Estimate :	37
4.2.1	Détermination des flux de trésorerie CF_t :	37
4.2.2	Calcul du Best Estimate - Méthode Réglementaire :	38
4.2.3	Calcul du Best Estimate - Méthode équivalent :	39
4.3	Calcul du SCR :	41
4.3.1	SCR Réglementaire VS SCR équivalent :	41
4.3.2	Durée de Convergence des SCR :	44
	Conclusion	46
	Remerciements	49
	A Formules et notations :	51
	B TH002 :	52
	C Pyramide des âges	53
	D Taux de Mortalité :	54
	E Documents de Towers Perrin :	56
	F Code R :	57

Résumé :

Mots clés : *Longévité, Mortality Improvement Factors, Solvabilité II, Towers Perrin, Best Estimate, SCR, Choc de longévité.*

Le bureau d'étude : ***Calibration du choc de longévité dans le cadre de l'ORSA*** est un B.E qui traite du **risque de longévité** spécifique à la réforme Solvabilité II entrée en vigueur en Janvier 2016.

Solvabilité II est pour rappel une réforme imposée par la législation européenne qui remanie le régime prudentiel auquel sont soumis les assureurs et réassureurs. À l'aune de cette réforme, le législateur définit des niveaux réglementaires qui permettent de spécifier un seuil de capital économique requis dont les entreprises d'assurances et de réassurances ont besoin pour répondre à leurs obligations vis à vis de leurs assurés.

Un de ces seuils, défini comme étant l'exigence de capital de solvabilité requise (SCR) dépend de l'ensemble des profils de risques auxquels les organismes d'assurances sont assujettis. Ce bureau d'étude s'intéresse **unique-ment** au risque de longévité. Il se propose ainsi d'étudier une autre manière de concevoir ce risque à travers l'application d'un **choc de longévité** différent de celui préconisé par le modèle standard, qui lui, appliqué avec une baisse uniforme de -20% sur tous les âges, ne permet pas de prendre en compte des aspects plus nuancés, tels que la tranche d'âge, la durée de couverture ou le sexe par exemple.

Ce travail s'appuie sur un rapport commandé par le législateur pour pouvoir apprécier le choc de longévité, c'est le cabinet Américain Towers Perrin (Actuellement Towers Watson) qui a été mandaté pour ce travail.

En s'inspirant de ce rapport, ce bureau d'étude tentera de proposer une critique cohérente et constructive du modèle utilisé par Towers Perrin et d'en extraire de nouveaux enseignements pour le contexte Français.

Chapitre 1

La réforme Solvabilité II

Grâce aux placements qu'elle effectue en contrepartie de ses engagements envers les assurés, l'assurance joue un rôle primordial dans le financement de l'économie. Il est donc essentiel que les assureurs et les réassureurs soient solvables pour faire face à leurs engagements.

1.1 Présentation de la réforme

La *solvabilité* des compagnies d'assurance est un enjeu majeur de la stabilité du système économique. Ainsi, la directive Solvabilité 2 entrée en vigueur en Janvier 2016 vise à « établir un cadre européen sûr et pérenne pour que l'assurance continue à être un vecteur de croissance et de stabilité économique pour l'Europe ».

L'objectif est d'effectuer une révision de l'ensemble des règles de calcul des fonds propres que doivent détenir les assureurs.

La solvabilité pour un assureur désigne sa capacité à respecter les engagements qu'il prend auprès de ses assurés. Elle dépend de :

- l'importance de ses engagements
- des ressources dont dispose la société d'assurance

Ces ressources doivent être suffisantes pour couvrir l'intégralité des engagements souscrits vis-à-vis des assurés et faire face à des événements imprévus susceptibles d'affecter le respect des engagements : ce sont les **capitaux propres réglementaires**.

Sous Solvabilité 1, les capitaux propres réglementaires ne sont pas calculés en fonction des risques réels auxquels les assureurs sont exposés. En effet, les sociétés d'assurance calculent une **Exigence de Marge de Solvabilité**(EMS) déterminée en fonction du volume des primes, des sinistres et des provisions mathématiques, et éventuellement du taux de cession en réassurance. Ainsi, Solvabilité 2 constitue une avancée majeure de l'approche de la solvabilité par les risques.



La réforme Solvabilité 2 s'articule autour de trois piliers :

— **Pilier 1** : Exigences quantitatives

Le pilier 1 détaille les exigences quantitatives auxquelles les assureurs sont soumis. Contrairement à Solvabilité 1 où la comptabilisation des actifs et des passifs était en valeur historique, sous Solvabilité 2 les actifs sont évalués en valeur de marché. En outre, il vise à s'assurer que l'organisme a la capacité à une date donnée de faire face à ses obligations à horizon un an dans 99,5% des cas.

— **Pilier 2** : Exigences qualitatives :

Le Pilier 2 expose l'ensemble des principes et pratiques attendus des organisations en matière de gouvernance et gestion des risques. Il définit plus précisément la fonction de « Risk management » ou gestion des risques dans l'article 44 de la directive. Le dispositif de gestion et de contrôle des risques doit identifier et évaluer tous les risques y compris ceux qui ne sont pas pris en compte dans la formule standard (le risque souverain, le risque stratégique, le risque de réputation...). Le pilier 2 renforce donc le dispositif de gestion des risques en imposant la mise en place de l'ORSA (Own Risk and Solvency Assessment) ou Evaluation interne des risques et de la solvabilité) dans les sociétés d'assurance.

— **Pilier 3** : Exigences de reporting prudentiel et information publique

Le pilier 3 définit les règles de transparence et de communication à respecter. Il définit un double niveau d'information : publique et pour les autorités de contrôle (ACPR).

Il est à noter que ces piliers sont complétés par un quatrième aspect que constitue le contrôle des groupes.

Les 4 fonctions clés de la directive

— **Fonction Actuarielle**

1. Coordination du calcul des provisions techniques, en garantissant le caractère approprié des méthodes et hypothèses utilisées, et en appréciant la suffisance et la qualité des données utilisées dans le calcul
2. Information de l'organe d'administration ou de gestion du caractère adéquat de ces calculs



3. Comparaison des meilleures estimations (BEL) aux observations empiriques,
4. Contribution à la mise en oeuvre effective du système de gestion des risques, en particulier pour la modélisation des risques sous-tendant le calcul des exigences en capital (BEL), et pour l'émission d'avis sur les politiques de souscription et de réassurance

— **Fonction Gestion des risques**

1. Identification, mesure, surveillance, maîtrise et reporting des risques de toute nature
2. Assistance aux organes de décision et de management dans l'identification, l'analyse de l'exposition et la gestion des risques au regard du profil de l'établissement, en amont des décisions stratégiques et commerciales
3. Pour les entreprises utilisant un modèle interne : conception, mise en oeuvre, test, validation, suivi documentaire du modèle interne et de ses modifications
4. Analyse de la performance du modèle, production du reporting et information des organes d'administration, de gestion ou de contrôle

— **Fonction Conformité**

1. Veille au respect des dispositions législatives, réglementaires et administratives
2. Evaluation de l'impact possible de tout changement d'environnement juridique sur les opérations de l'entreprise
3. Identification et évaluation du risque de conformité (risque de sanctions légales ou réglementaires)

— **Fonction Audit interne**

1. Evaluation de l'adéquation et l'efficacité du système de contrôle interne et des autres éléments du système de gouvernance
2. Information des conclusions/recommandations aux organes d'administration et de gestion et suivi de leur mise en oeuvre
3. Existence de chartes d'audit, de plans d'audit, de méthodologies et de comités d'audit adaptés à la complexité de l'établissement

1.1.1 Définition et objectifs de l'ORSA

L'ORSA s'articule au niveau du pilier 2 de Solvabilité 2 et son objectif est d'illustrer que la solvabilité actuelle et future est maîtrisée et que les



principaux risques sont bien gérés. Le rapport de conclusions ORSA devra être formellement approuvé par le Conseil d'administration et donc par le Comité Exécutif.

C'est un processus essentiellement prospectif dans lequel les organismes doivent évaluer :

- Le besoin global de solvabilité, compte tenu du profil de risque spécifique, des limites approuvées de tolérance au risque et de la stratégie commerciale de l'entreprise.
- Le respect permanent des exigences de capital.
- L'analyse de l'adéquation du profil de risque avec la formule standard.

Le but de cette évaluation prospective est donc d'évaluer la capacité de l'organisme à satisfaire aux exigences réglementaires notamment en termes de couverture du SCR. Toutefois, les assureurs disposent d'une plus grande liberté en ce qui concerne le choix des méthodes.

1.1.2 La marge de solvabilité (SCR)

Le capital de solvabilité requis (**SCR**) correspond au niveau minimum de ressources disponibles dont l'assureur doit disposer pour être solvable. Ce niveau minimum correspond à la perte la plus importante à horizon un an que peut subir le bilan en cas de survenance d'un événement extrême avec une probabilité de 99,5%. Dès lors que l'organisme ne couvrira plus son SCR, le superviseur devra établir un plan de redressement en concertation avec ce dernier.

Le SCR est basé sur le profil de risque de l'organisme. Il peut être calculé de plusieurs façons différentes :

- Soit par une formule standard calibrée uniformément sur le marché européen (elle se base sur une subdivision des risques définie par la cartographie des risques)
- Soit par un modèle interne développé par l'assureur et après autorisation par le superviseur.
- Soit par une combinaison de ces deux méthodes appelée modèle interne partiel (MIP).

Le Minimum Capital Requirement (**MCR**) est le niveau plancher de Solvabilité c'est à dire le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'autorité de contrôle intervient.

Le calcul du SCR par la formule standard :

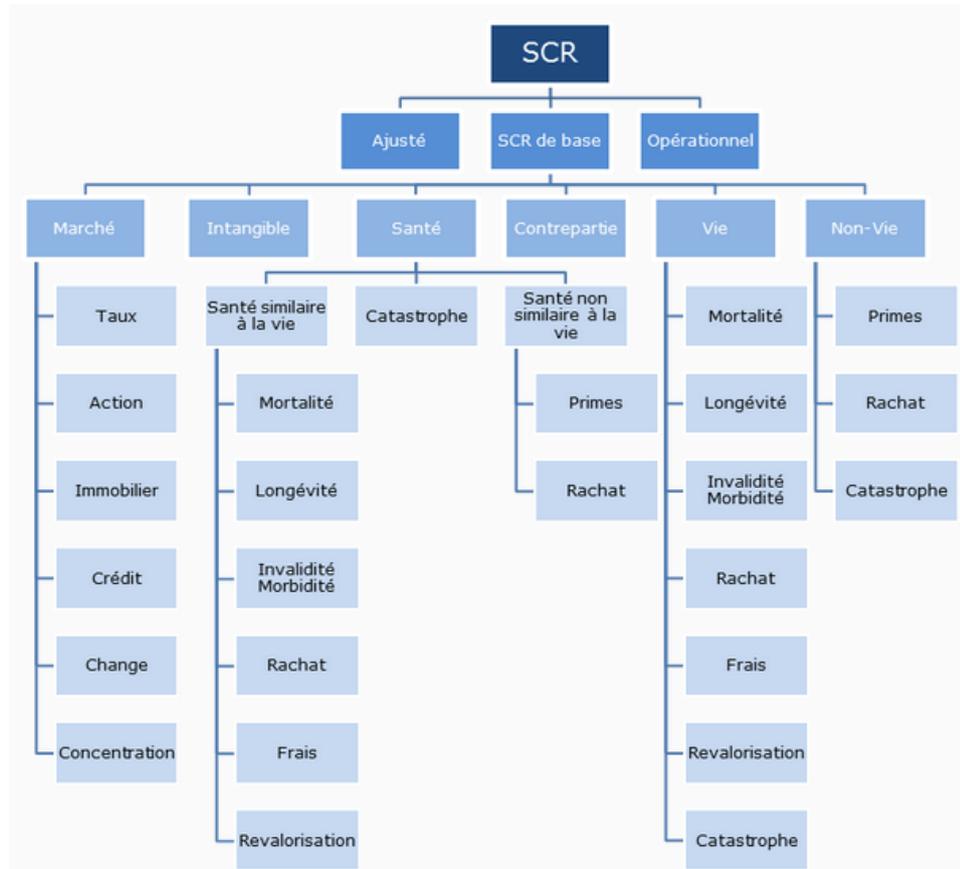
La mesure de risque retenue par l'EIOPA pour le calcul standard du SCR et pour évaluer les risques est la Value at Risk (VaR).

Le SCR (BSCR d'un module de risque) est calibré avec la VaR des fonds



propres de base d'une entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % . Le calibrage s'effectue au niveau de chaque chaque module ou sous-module de risque et on applique la formule :

$$SCR = SCR \text{ de base (BSCR)} + SCR \text{ opérationnel} - \text{Ajustements}$$



1.2 Le Risque de longévité

Le risque de longévité est intégré dans les modules de risque Vie et Santé sous solvabilité 2. C'est un risque de long terme qui correspond au risque financier dû au fait que les individus vivent en moyenne significativement plus longtemps que prévu. Avec le vieillissement de la population, ce risque est un enjeu important que ce soit du point de vue social, politique ou économique. Dans le cadre de ce bureau d'étude, nous nous intéresserons au risque de longévité intégré dans le module de risque Vie.



1.2.1 L'amélioration de la mortalité en Europe

L'espérance de vie à la naissance a augmenté rapidement au cours du siècle dernier grâce à un certain nombre de facteurs, notamment l'amélioration des conditions de vie, les progrès médicaux et technologiques, les changements de mœurs et d'alimentation.

Au niveau démographique, le vieillissement de la population européenne en est la conséquence principale. En plus d'un vieillissement par le haut avec une augmentation de l'espérance de vie, il y a aussi un vieillissement par le bas avec une baisse importante de la natalité.

Sur le plan économique, un article d'Antolin et Blommestein prouve que l'amélioration de la longévité des personnes de plus de 80 ans a un impact important sur le PIB d'un pays ainsi que sur les décisions politiques des gouvernements.

Les tables de mortalité

Une table de mortalité (aussi appelée table de survie) est une construction qui permet de suivre le destin d'une population. Les tables de mortalité servent à tarifier, à provisionner ou à faire des estimations sur l'espérance de vie. L'INSEE, en fournissant des données mises à jour sur la mortalité de la population, permet la construction de tables plus récentes.

Du point de vue de l'assureur, on distinguera tables réglementaires et tables d'expérience et d'un point de vue technique, on distinguera : tables du moment et tables prospectives (aussi appelées tables par génération, elles intègrent l'aspect dynamique de la mortalité).

Les tables réglementaires sont :

1. La TF 00-02 et la TH 00-02 : Elles sont respectivement basées sur les populations féminine et masculine (construites à partir de la table INSEE 2000-2002) et sont utilisées pour les contrats d'assurance vie (autre que les rentes viagères).
2. La TGF05 et la TGH05 : Elles sont respectivement basées sur les populations féminine et masculine et constituent des tables par génération. Elles comprennent autant de tables de mortalité qu'il y a d'années de naissance comprises entre 1886 et 2005. Elles sont utilisées pour les opérations de rentes viagères.



1.2.2 Calcul du SCR de Longévité selon la formule standard

En assurance-vie, l'aléa porte sur la durée de vie humaine. Il est donc nécessaire que les assureurs puissent quantifier le risque de longévité.

Le Best Estimate

Dans le cadre réglementaire solvabilité II, le capital requis est calculé selon la notion de *Best Estimate*. Le Best estimate permet de mesurer les engagements de l'assureur sans prise en compte de la marge de risque : on parle de **fair value**.

Les méthodes utilisées pour le calculer peuvent être :

- stochastiques : on évalue la distribution des flux futurs dont la moyenne actualisée conduit à la définition du Best Estimate
- déterministes : l'évaluation de la sinistralité ultime « moyenne » ou « la plus probable » permet, après application de cadences et de la courbe des taux, de déduire la valeur actualisée des flux futurs.

Le Best estimate est égal à la moyenne pondérée des cash-flows futurs probables actualisée avec une courbe des taux sans risque.

$$BE = \sum_t^T \frac{CF_t}{(1 + r_t)^t}$$

avec :

- CF_t les cash flows des prestations futures,
- r_t le taux sans risque
- T l'horizon de projection.

Conformément aux indications de l'EIOPA, la **courbe des taux sans risque** est construite de la façon suivante :

Taux d'actualisation = Taux swap de marché - Credit Risk Adjustment (CRA) + Volatility Adjustment (VA)

où :

- **Taux swap de marché** : courbe construite à partir des taux swap de marché
- **Credit Risk Adjustment** : ajustement qui permet d'enlever le risque de défaut de la jambe variable du taux swap.



- **Volatility Adjustment** : prime qui permet d'ajuster le taux sans risque des variations des spreads corporate et souverains.

Il est à noter que l'horizon de projection doit couvrir la durée de vie totale du portefeuille d'assurance et de réassurance.

Le SCR de longévité

L'approche formule standard repose sur trois étapes fondamentales :

- Détermination d'un capital économique pour chaque risque élémentaire (ex. actions, taux, mortalité, rachat ...)
- Agrégation des capitaux au sein de chaque module de risques (marché, souscription-vie, souscription non-vie, . . .) : il s'agit d'une agrégation intra-modulaire.
- Agrégation des capitaux des différents modules : il s'agit de l'agrégation inter-modulaire

Le calcul du SCR de longévité passe par un stress-test qui consiste à choquer tous les taux de mortalité uniformément de 20% à la baisse. Le SCR de longévité sera égal à la différence entre le $BE_{\text{après choc}}$ et le $BE_{\text{avant choc}}$

$$SCR_{\text{longévité}} = BE_{\text{après choc}} - BE_{\text{avant choc}}$$

Chapitre 2

Étude UNESPA : Towers Perrin

2.1 Présentation du modèle :

Plusieurs modèles issus de l'industrie ont été développés pour pouvoir modéliser le risque de longévité, rappelons-le, le risque de longévité, accolé à celui de la mortalité, impacte de façon conséquente le profil de risque de compagnies d'assurances dont le modèle commercial est le versement d'un capital en cas de décès et/ou de rentes en cas de vie.

Le régulateur impose donc avec la réforme Solvabilité II, une prise en charge de cette incertitude démographique. Pour le risque de longévité, cela se traduit par le risque que les souscripteurs des contrats vivent plus longtemps.

2.1.1 Towers Perrin, Milliman, Modèles issus de l'industrie :

Ce qu'on appelle délibérément *Modèles issus de l'industrie* sont des développements que des cabinets de conseil internationaux ont élaborés sur commande de l'UNESPA pour modéliser ce risque de longévité de façon indépendante.

On peut aussi supposer l'existence de modèles élaborés par les compagnies d'assurances elles mêmes mais qui rentrent dans le cadre du modèle interne de l'entreprise. Deux études principales ont été commandés par l'UNESPA.¹

- Towers Perrin pour Solvabilité II (2009)
- Le modèle Milliman sous Solvabilité II (2011)

Les deux modèles, assez similaires, se basent sur des *facteurs d'amélioration*

1. Union des assurances et réassurances espagnoles



de mortalité, qui sont calculés différemment, mais qui représentent un indice quantifiant une baisse des décès dans un temps défini.

Ces *facteurs d'amélioration de mortalité* sont ensuite projetés dans un modèle qui permet de suivre cette amélioration de la mortalité de façon aléatoire selon plusieurs scénarios. Pour chacun de ces modèles, des chocs de longévité en sont ensuite déduits pour pouvoir les appliquer sur un portefeuille d'assurés et impacter le risque.

2.1.2 Contexte de l'étude :

L'étude de Towers Perrin trouve sa source dans la critique du modèle Standard qui selon eux ne quantifie pas assez finement le risque de longévité. Pour eux, un choc permanent de 25% en une seule fois (One-Off shock) ne suffit pas pour appréhender de façon durable le risque de longévité. Leurs argumentaires s'appuient sur deux grandes constatations :

- L'impact du risque de longévité dépend de la durée de couverture et de l'âge des assurés.
- La grande simplicité du modèle qui requiert un grand capital risque de longévité pour une seule année.

Entre autres, ils maintiennent l'observation que les données historiques permettent de saisir une amélioration continue dans le temps de la mortalité, et non pas une amélioration brusque, localisée, et discontinue.

2.2 Données utilisées :

Tout d'abord pour son étude, Towers Perrin s'est basée sur les données de taux de mortalité de 22 pays européens à partir de 1956. Leur choix de l'année 1956 a pour motivation deux raisons principales :

- Manque de données crédibles avant 1956 pour l'Allemagne qui a un poids démographique élevé.
- Eviter l'impact des deux guerres mondiales sur la volatilité du facteur d'amélioration de la mortalité.

Ces données ont été ensuite agrégées dans une seule table, suivant le poids démographique de chaque pays.



2.3 Facteur d'amélioration de la mortalité :

2.3.1 Utilisation des tranches d'âges :

La différence significative entre les comportements des générations, ainsi que l'avancée de la médecine, expliquent le choix de Towers Perrin de procéder par tranches d'âges dans le calcul des facteurs d'amélioration de la mortalité. Ainsi les tranches d'âges analysées sont les suivantes :

- Moins de 50 ans
- Entre 51 et 60 ans
- Entre 61 et 70 ans
- Entre 71 et 80 ans
- Entre 81 et 90 ans
- Plus de 90 ans

2.3.2 Calcul du facteur d'amélioration de la mortalité :

L'étude de Towers Perrin s'est basée essentiellement sur le calcul des facteurs d'amélioration de la mortalité, ces facteurs mesurent en effet l'évolution de la longévité au sein d'une population.

Le calcul des facteurs d'amélioration de la mortalité est fait pour chaque tranche d'âge, tout d'abord Towers Perrin compare les taux de mortalité par période de 5 ans pour ensuite appliquer la racine 5ème au quotient obtenu dans le but de l'annualiser. La formule utilisée est la suivante¹ :

$$Facteur_t = 1 - \left(\frac{R_{t+5}}{R_t}\right)^{1/5}$$

Où R_t désigne le taux de mortalité au cours de l'année t de la classe d'âge considérée.

Nous pensons que ce choix de calcul par tranche de 5 ans est motivé par le manque de données annuelles.

A l'aide d'un test de normalité, Towers Perrin s'assurent ensuite que les facteurs d'amélioration de la mortalité suivent une loi normale. Ainsi elle propose de calculer la moyenne et l'écart-type de ces facteurs d'amélioration de la mortalité pour chaque tranche d'âge, dans le but de s'en servir dans leur modèle de projection stochastique qu'on abordera dans la section 2.4.

1. Attention, la formule issues du rapport de Towers Perrin est différente de la formule que nous présentons. Nous pensons qu'il y a une faute de frappe dans ce rapport à cet endroit.



2.4. MODÈLE STOCHASTIQUE : PROJECTION DE L'AMÉLIORATION DE LA MORTALITÉ.

	50 ans j	50-59 ans	60-69 ans	70-79 ans	80-89 ans	+ 90 ans
μ	1.79 %	1.04%	1.29%	1.30%	0.97%	0.20%
σ	2.98%	1.40%	1.32%	1.18%	1.01%	0.79 %

TABLE 2.1 –
Facteurs annuels d'amélioration de la mortalité en Europe entre 1956 et 2006.

Avec :

- μ : moyenne des facteurs d'amélioration de mortalité.
- σ : écart-type des facteurs d'amélioration de la mortalité.

2.4 Modèle stochastique : Projection de l'amélioration de la mortalité.

À l'aide de la moyenne et de l'écart-type des facteurs d'amélioration de la mortalité calculé ci-dessus et en s'appuyant sur l'hypothèse que ces facteurs suivent une loi normale, Towers construit un modèle de projection stochastique qui se base sur la loi *normale*.

Le principe du modèle est de projeter une population de base en prenant en considération le nombre de survivants d'une année à une autre, ainsi pour un âge x donné et pour projeter la population de base sur une période d'un an la formule utilisée est la suivante :

$$l'_{x,x+1} = l'_{x,x} * [1 - q_x * (1 - \mu_x - \sigma_x \times K_{aleatory})]$$

$$l'_{x,x} = l_x$$

avec :

- l_x : population ayant un âge x à l'année de départ.
- q_x : probabilité de décès dans un an, en ayant un âge x au début de l'année.
- $l'_{x,x+n}$: population vivante après n année en ayant un âge x au début.
- μ_x : moyenne du facteur d'amélioration de la mortalité pour la tranche d'âge correspondante.
- σ_x : écart-type du facteur d'amélioration de la mortalité pour la tranche d'âge correspondante.
- $K_{aleatory}$: variable aléatoire de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.



ATTENTION : Tout au long de l'étude, le x est fixé, et le n varie au file de la période souhaitée.

En prenant n le nombre d'années de projections, la population à la fin de la projection est :

$$l'_{x,x+n} = l'_{x,x+n-1} * [1 - q_{x+n-1} \times \prod_{i=1}^n (1 - \Phi(i, x))]$$

où :

$$\Phi(i, x) = \mu_{x+i} - \sigma_{x+i} \times K_{aleatory}$$

Ce calcul se répète 5000 fois, en considérant des réalisations indépendantes de la variable aléatoire $K_{aleatory}$. On obtient donc 5000 scénarios indépendants pour chaque âge.

Il est à noter que la table utilisée par Towers Perrin pour ses projections est la GRM95², la particularité de cette table est qu'elle est construite pour la génération des personnes atteignant l'âge de la retraite en 2003 en Suisse mais ressemble plus aux tables du moment utilisées en France (**TH0002**). Cette table est souvent utilisée dans le cadre des rentes³ (*pension benefits*) dans plusieurs pays européens comme la Suisse et l'Espagne.

2.5 Construction du choc de longévité :

On rappelle que le but de l'étude de Towers Perrin est de prouver les limites d'un choc de longévité permanent de 25% comme proposé par le modèle standard.

Rappelons aussi qu'appliquer un choc de longévité de 25% revient à appliquer un choc de 75% sur les probabilités de décès (q_x ⁴), on obtient donc :

$${}_nq'_x = 75\% \times_n q_x$$

2. cf Annexe

3. Le risque de longévité s'applique aux portefeuilles proposant des contrats de rentes, d'où l'utilisation de cette table par Towers Perrin.

4. ${}_nq_x = 1 - \frac{l'_{x,x+n}}{l_x}$



2.5. CONSTRUCTION DU CHOC DE LONGÉVITÉ :

Avec :

- ${}_nq'_x$: Probabilité de décès entre le début de l'année $n - 1$ et l'année n pour une personne d'âge x au début de l'année n , après choc.

On peut ainsi remarquer que d'après la formule de projection fournie par Towers Perrin pour un âge x et une durée n que :

$$\frac{l'_{x,x+n}}{l'_{x,x+n-1}} = 1 - q_{x+n-1} \times \prod_{i=1}^n (1 - \Phi(i, x)) \quad (2.1)$$

On en déduit que :

$$q'_{x+n-1} = 1 - \frac{l'_{x,x+n}}{l'_{x,x+n-1}} = q_{x+n-1} \times \prod_{i=1}^n (1 - \Phi(i, x)) \quad (2.2)$$

Donc : $\prod_{i=1}^n (1 - \Phi(i, x))$ peut être traduit comme le choc appliqué d'une année à une autre, ce qui veut autrement dire un choc appliqué pour une durée d'une année.

Cependant le but de l'étude est de trouver le choc de longévité pour un âge x et une durée n qui varie normalement dans le cadre des contrats de rente de 5 ans jusqu'à la fin de vie de l'assuré.

Pour cela, Towers Perrin procède en 3 étapes :

- Calculer pour une durée n , la mortalité de base : $1 - \frac{l_{x,x+n}}{l_x}$
- Calculer pour une durée n , la mortalité améliorée : $1 - \frac{l'_{x,x+n}}{l_x^5}$
- Comparer la mortalité améliorée et la mortalité de base.

Sachant que la projection consiste à simuler 5000 scénarios, le résultat après les 3 étapes ci-dessus est un vecteur de 5000 variables qui représentent des choc de longévité. Ainsi pour obtenir un choc finale pour la durée n et un âge de départ x , Towers Perrin propose de prendre la moyenne des 5000 chocs.



Âge	Durée de couverture	5 ans	10 ans	15 ans	20 ans	toute la vie
	30 - 39				18.32%	20.68 %
40 - 49		11.05%	15.54%	16.78%	17.29%	18.56%
50-59		6.76%	7.67%	8.79%	9.97%	12.89%
60 - 69		5.46%	7.07%	8.02%	8.76%	10.88%
70 - 79		4.21%	5.45%	6.44%		8.62%
80- 89		4.06%				6.79%
90 - 99						4.95%

TABLE 2.2 –
Chocs longévité en Europe.

Les chocs de longévité obtenus par Towers Perrin, montrent clairement que le choc de 25% proposé par le modèle standard⁶ n'est pas adapté à toutes les durées de rentes et les tranches d'âge d'assurés.

On peut déduire de la table des chocs deux résultats importants :

- Le choc de longévité décroît quand la tranche d'âge des assurés augmente.
- Le choc de longévité croît quand la durée de couverture augmente.

Ceci est expliqué par le fait que plus l'âge des assurés augmente moins ils ont la possibilité de bénéficier de l'amélioration de la mortalité, et que plus la durée de couverture est petite moins on bénéficie de l'amélioration de l'espérance de vie.

6. Dans le cadre du QIS 4 le choc de longévité est de 25%.

Chapitre 3

Révision de l'étude :

Ce chapitre, le principal de ce présent rapport, consiste à réviser l'étude de Towers Perrin. On suivra pas à pas les principales étapes que le cabinet Américain a utilisé pour concevoir les chocs de mortalités qu'il présente.

3.1 Facteurs d'amélioration de la mortalité

Un facteur d'amélioration de la mortalité est un ratio qui permet de quantifier l'amélioration de la mortalité dans un temps imparti. Une population donnée, grâce aux progrès de la science et de la médecine permet *d'améliorer* ses conditions de vie. C'est cette amélioration lissée dans le temps qui permet de concevoir sa longévité future.

La notion de longévité peut quant à elle être confondue avec la durée de vie moyenne des individus d'une espèce donnée qui évolue en de bonnes conditions de vie.

Pour pouvoir calculer ces facteurs, on utilisera en entrée les données de l'INSEE ¹ *relatives au taux de mortalités par sexe et groupes d'âges.*²

3.1.1 Regroupement des tranches d'âges adéquates :

Nous souhaitons obtenir des facteurs d'amélioration de la mortalité qui obéissent à des tranches d'âges particulières, c'est à dire qu'on souhaite le même regroupement d'âge que ceux définis par l'étude de Towers Perrin : **Inférieur à 50 ans, 50-59 ans, 60-69 ans, 70-79 ans, 80-89 ans et supérieur à 90 ans.**

1. L'Institut national de la statistique et des études économiques collecte, produit, analyse et diffuse des informations sur l'économie et la société française. www.insee.fr/



Le regroupement choisi dans la table de l'INSEE est un regroupement par palliers de 5 années. Il s'agit donc de trouver un moyen pour récupérer les tranches d'âge qu'on souhaite utiliser.³

L'idée est d'utiliser *la pyramide des âges de la population française*⁴ pour calculer le **poids relatif à chaque tranche d'âge**. Cela, afin de s'en servir pour agréger les différents regroupements de la table présente. Par Exemple :

$$Tranche_{10-19} = Poids_1 \times Tranche_{10-14} + Poids_2 \times Tranche_{14-19}$$

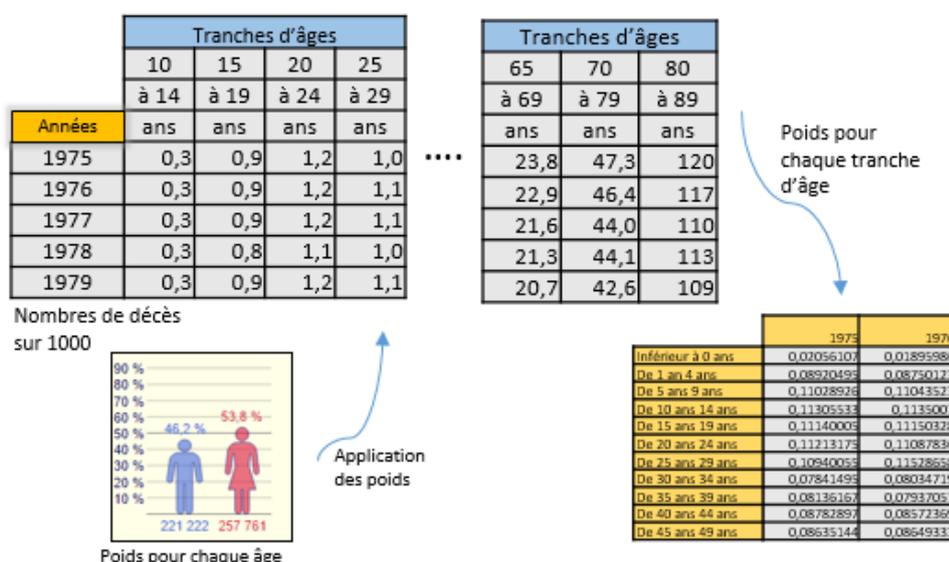


FIGURE 3.1 – Regroupement des Tranches d'âge souhaitées

Retrouver les poids, revient à diviser les effectifs d'une tranche donnée existante par la somme des effectifs du nouveau groupement d'âge qu'on veut construire. Pour cela on a construit une macro sur Excel qui repose principalement sur la formule suivante :

$$Poids_i = \frac{effectif_i}{\sum effectifs}$$

2. Voir Annexe : Ratio de Taux de mortalité

3. D'un autre point de vue, on aurait tout simplement pu utiliser le groupement qu'affiche la table de l'INSEE, mais cela nous aurait privé d'un moyen de comparaison avec les résultats de l'étude Towers.

4. Pour les deux tables, les données sont issus pour la France Métropolitaine seulement



3.1. FACTEURS D'AMÉLIORATION DE LA MORTALITÉ

A l'aide des poids obtenus ci-dessus, on regroupe les différents taux de mortalité en six tranches principales qui correspondent à ceux de Towers Perrin, en sommant les produits des poids par les taux de mortalité correspondants. On obtient ainsi de nouvelles tranches d'âges agrégées à l'aide des poids calculés.

3.1.2 Calcul des facteurs d'amélioration de la mortalité :

Une fois les regroupements calculés, on obtient ainsi une table de taux de mortalité avec 6 tranches d'âges et on applique la formule de calcul des facteurs d'amélioration :

$$Facteur_t = 1 - \frac{R_{t+1}}{R_t}$$

Avec R_t le ratio de mortalité de la table nouvellement construite.

On utilise cette formule, différente de celle de Towers Perrin, car on dispose nous, de données annuelles de bonne facture sur un horizon 30 ans. (depuis 1975).

⊙ **Il est important de noter qu'à ce stade de l'étude, on fixe l'année de référence pour toute la suite du rapport à l'année 2006, car notre table de l'INSEE s'arrête à cette date ci. C'est à partir de cette date qu'on se situe par rapport au temps. Exemple : si quelqu'un est né en 1956, il aura 50 ans, pour l'année de référence 2006**

On construit donc un tableau représentant la moyenne et l'écart-type des facteurs d'amélioration de la mortalité pour chaque tranche d'âge.

	- de 50 ans	50-59 ans	60-69ans	70-79 ans	89-89 ans	+ de 90 ans
μ	1.34 %	1.15%	1.51 %	1.59%	1.14%	0.39%
σ	1.24%	0.74%	0.64%	0.96%	1.29%	0.67 %

TABLE 3.1 –
Facteurs annuels d'amélioration de la mortalité en France de 1975 à 2006.

On peut aussi avoir une idée de l'amélioration pour chaque tranche d'âge pour chaque période. Le graphique ci-dessous possède quelques similitudes avec celui proposé par Towers Perrin. ⁵

5. Voir le chapitre II : Table 2.1 où le tableau original est représenté

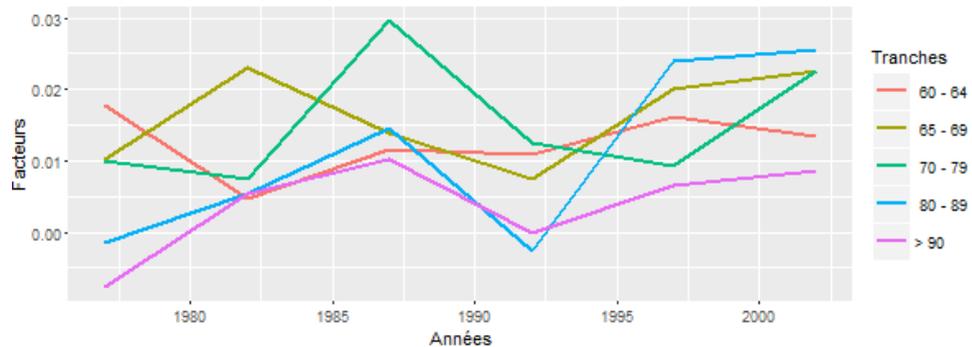


FIGURE 3.2 – Facteurs d'amélioration de la mortalité en France

On remarque que plus l'âge augmente, plus les coefficients d'amélioration de la mortalité diminuent. Les personnes les plus âgées ne peuvent plus bénéficier d'une amélioration de leurs mortalité, ce qui est assez plausible.

3.1.3 Vérification de la normalité de l'échantillon

L'étude de Towers se base sur le fait que l'échantillon qui nous a amené à calculer les coefficients d'amélioration de la mortalité est gaussien.

On calcule les coefficients d'amélioration de la mortalité sur les tranches d'âges non regroupées encore. On obtient une matrice qui contient 20 variables (Tranches d'âges) et 30 individus (Années), c'est donc un échantillon de 600 valeurs. La taille de l'échantillon est suffisante pour pouvoir effectuer un test de normalité.

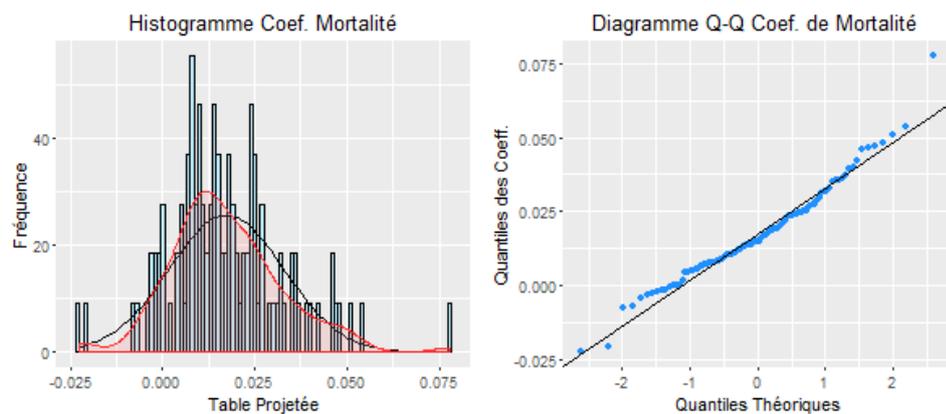


FIGURE 3.3 – Test de Normalité sur les coef. d'amélioration de la mortalité

L'hypothèse de normalité nous paraît raisonnable au vu des résultats. On peut maintenant s'atteler à projeter les tables de survie.



3.2 Calcul de la table de mortalité projetée :

L'étude de Towers Perrin portant sur des données agrégées de différents pays européens, notre choix des données va naturellement différer de celui de l'étude commandée par L'UNESPA.

3.2.1 Considération préalable :

Le modèle fourni consiste à utiliser les facteurs *d'amélioration de la mortalité* pour impacter la mortalité future. Cet impact se matérialise *in fine* sur la table de survie utilisée, car ce sont les effectifs qu'elle inclut qui nous serviront ensuite à *quantifier* la probabilité de décès et/ou de survie.

On peut comprendre la finalité du modèle en regardant le schéma ci dessous :

Table de survie <i>Base</i>		Table de survie <i>Projetée</i>
l_1		l'_1
l_2		l'_2
l_3	→	l'_3
...	<i>Coefficient d'amélioration</i>	...
...	<i>de la mortalité</i>	...
...		...
l_{109}		l'_{109}
l_{110}		l'_{110}
l_{111}		l'_{111}

TABLE 3.2 – *Projection de la survie en utilisant les facteurs d'amélioration de la mortalité précédemment décrits.*

où l_x est l'effectif de survivants à la date t_x pour $x \in [1, \dots, 111]$.

La table de survie *Base* sur laquelle on travaille impacte directement les résultats de notre étude. Comme on l'avait expliqué précédemment, Towers utilise la Table GRM95¹ pour constituer ses scénarios. Dans un contexte Français, c'est sur un choix de tables de mortalité réglementaires de l'INED² que l'on va axer notre étude.

1. Voir Chapitre II - Étude UNESPA : Towers Perrin

2. Institut National des Études Démographiques, voir Annexe B pour plus d'informations sur les Tables de mortalité



3.2.2 Choix de la table de mortalité réglementaire :

On considère arbitrairement que le contrat d'assurance vie que l'on utilise dans cette étude est un contrat en rente viagère. C'est un choix arbitraire motivé par la simplicité du produit :

- **L'aléa** correspond à la durée de vie de l'assuré(e).
- **La prime** est versée pendant un temps défini ou en une fois par l'assuré(e).
- **La rente viagère** est versée à l'assuré(e) pendant la vie entière jusqu'à son fatale décès.

L'incertitude du contrat pèse donc sur la durée de la prestation de l'assureur, qui est ainsi fortement corrélée avec la longévité de l'assuré. On utilisera ainsi une table **TGH05/TGF05** seule reconnue pour des contrats de ce type.³

Il s'agit d'un type de table spécifique, construite avec des méthodes prospectives, elle est dite *générationnelle*. Cela est sensiblement différent de la table utilisée par Towers Perrin qui est une table de mortalité *du moment*. On pense résolument que le cabinet Américain n'a pas pu accéder à ce genre de tables par manque de données fiables dont disposaient les pays étudiés et/ou à cause de la manière dont il a procédé pour l'agrégation de ses populations.

Néanmoins, et pour pouvoir comparer la robustesse de nos résultats, Nous avons utilisé de surcroît une table du moment, une **TH002/TF002**. Mais cela reste cantonné à une utilisation pour apprécier nos résultats *à posteriori*.

3.2.3 Application du modèle stochastique :

On rappelle brièvement le modèle exposé à la section précédente :

Pour rappel, le modèle s'écrit :

$$l'_{x,x+n} = l'_{x,x+n-1} \times [1 - q_{x,x+n-1} \times \prod_{k=1}^n (1 - \Phi_{(k,x)})] \quad (1)$$

Tel que : $\Phi_{(k,x)} = \mu_{x+k} + \sigma_{x+k} \times \mathcal{N}(0, 1)$

3. Le droit des assurances Français impose dans sa réglementation le choix de tables spécifiques pour un certain type de produit Cf : JO texte 11 - Arrêté du 1er août 2006 portant homologation des tables de mortalité pour les rentes viagères.



3.2. CALCUL DE LA TABLE DE MORTALITÉ PROJÉTÉE :

Où μ_{x+k} et σ_{x+k} sont resp. la moyenne et la variance des coefficients d'amélioration de la mortalité pour la tranche d'âge correspondante à l'année $x+k$ où $k \in [1, n]$

Le modèle consiste à *projeter* l'effectif d'une population à un **âge donné** x d'une année sur l'autre en prenant en compte l'**amélioration de la mortalité** de cet effectif selon les facteurs d'amélioration de la mortalité qui lui sont attribués.

En d'autres termes, on construit une nouvelle table de survie, et chaque effectif l_x va être amélioré selon le coefficient attribué à sa tranche d'âge.

Les tranches d'âge se décomposent selon six groupes, de 50 à 90 ans, avec un pallier de 10 ans à chaque fois. On a gardé pour nos simulations la même composition de la tranche d'âge que celle dans l'étude de Towers Perrin. Cela a été motivé par un soucis de confrontation des résultats.⁴

On a ensuite mis en place un algorithme qui permet d'appliquer le modèle en recodant à chaque fois la bonne période avec la tranche d'âge considéré :

— Algorithme de la projection du modèle : —

AgeIndic, **NombresDelignes**, définies comme *Constantes*
Mu, **Sigma**, **Phi**, **L_x**, **Q_x**, définies comme *Vecteurs*

$Q_x = 1 - L(x+1)/L_x$ // Calcul de la probabilité de décès.
Age = **AgeIndic** = x // Indication de l'âge de départ.
PSI = 1 ; **Aléa** = **Normal(0,1)** // Initialisation de **PSI** & de **Aléa**

Pour i = 1 à NombreDeLignes :
 j reçoit la valeur 1 **Si** $0 < x < 49$ **ou** 2 **Si** $50 < x < 59$
 3 **Si** $60 < x < 69$ **ou** 4 **Si** $70 < x < 79$
 5 **Si** $80 < x < 89$ **ou** 6 **Si** $x > 90$

Phi = **Mu_j** + **Sigma_j** × **Aléa**

Psi = $(1 - \mathbf{Phi}) \times \mathbf{Psi}$ //Récurrence pour récupérer le produit
 L_Projected_(i+1) = **L_Projected_(i)** × $(1 - (Q_i \times \mathbf{Psi}))$

Age = **Age** + 1

Fin i

4. Les données récupérées sur la table des effectifs de l'INSEE cf : Tableau 67 - Taux de mortalité par sexe et groupes d'âges - pouvaient nous permettre de constituer des tranches bien plus fines et donc des facteurs d'améliorations de la mortalité plus localisés, mais cela nous aurait privés d'un moyen pertinent pour comparer nos résultats.



Où la variable **NombresDelignes** dépend de la table de mortalité choisie pour la simulation des scénarios, il s'agit du nombre de lignes pour la **TH002/TF002** ou **TGH05/TGF05** selon l'âge choisi pour la simulation.

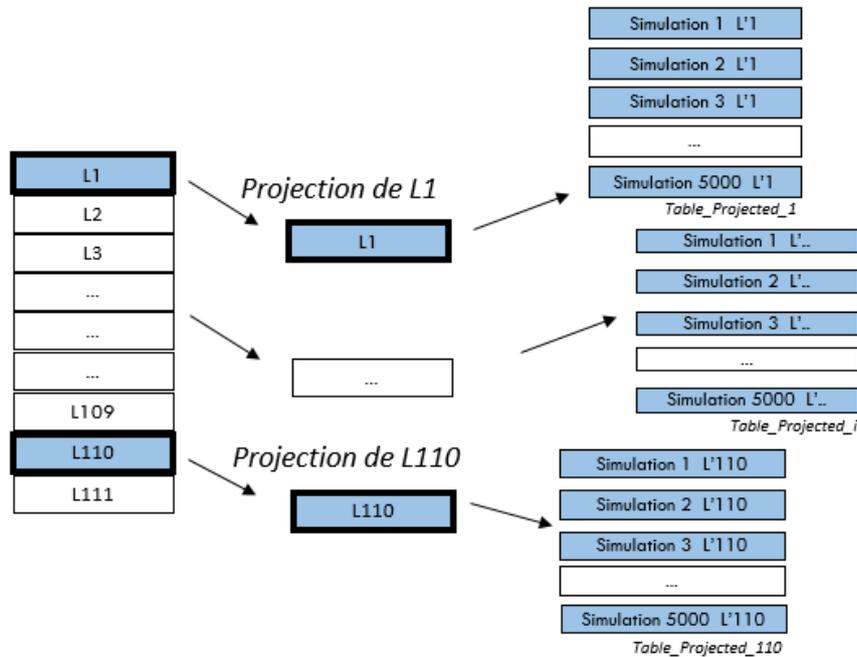


FIGURE 3.4 – Application du modèle Stochastique sur la table de mortalité et obtention des 5000 scénarios

Une fois la simulation réalisée, on obtient un ensemble de **111 tables** ou chaque table comporte **5000 variables**. C'est à dire que pour chaque $i \in [1, \dots, 111]$: $l_{0,i}$ est simulé 5000 fois et stocké dans une table numérotée avec l'indice i pour **Table_Projected_i** dans le schéma ci dessus ⁵.

Remarque :

On a utilisé le logiciel R pour pouvoir obtenir toutes ces tables. On a du utiliser un Package de R "car" pour pouvoir recoder les tranches d'âge avec le facteur adéquat. Et les fonctions "assign", "paste" et "get" du Package Base de R 3.1.3 qui permettent seules de pouvoir manipuler des tableaux lourds de ce type.

L'utilisation du modèle obéit à des considérations différentes selon que

5. Par exemple, pour l'effectif **L2 = 99944** , la **Table_Projected_L2=** (99944.81, 99944.78 , , , , 99944.42, 99944.61, 99944.96)



3.2. CALCUL DE LA TABLE DE MORTALITÉ PROJETÉE :

la projection se fasse avec une table Générationnelle ou avec un table du Moment. On a choisi pour confronter la véracité de nos résultats d'utiliser les deux Tables. À priori, il ne devrait pas y avoir un très grand décalage, et cela nous permettra par ailleurs d'émettre une critique sur l'utilisation par Towers Perrin d'une table du Moment uniquement.

3.2.3.1 Projection avec la TGH05 :

La TGH05 est une table générationnelle, c'est à dire que les cohortes de personnes représentées sur la table de mortalité sont *normalement* suivies jusqu'à leurs décès. On peut voir la TGH05 comme un ensemble de tables pour chaque âge donné. Il faut donc "récupérer" la table adéquate pour l'âge qu'on voudrait simuler.

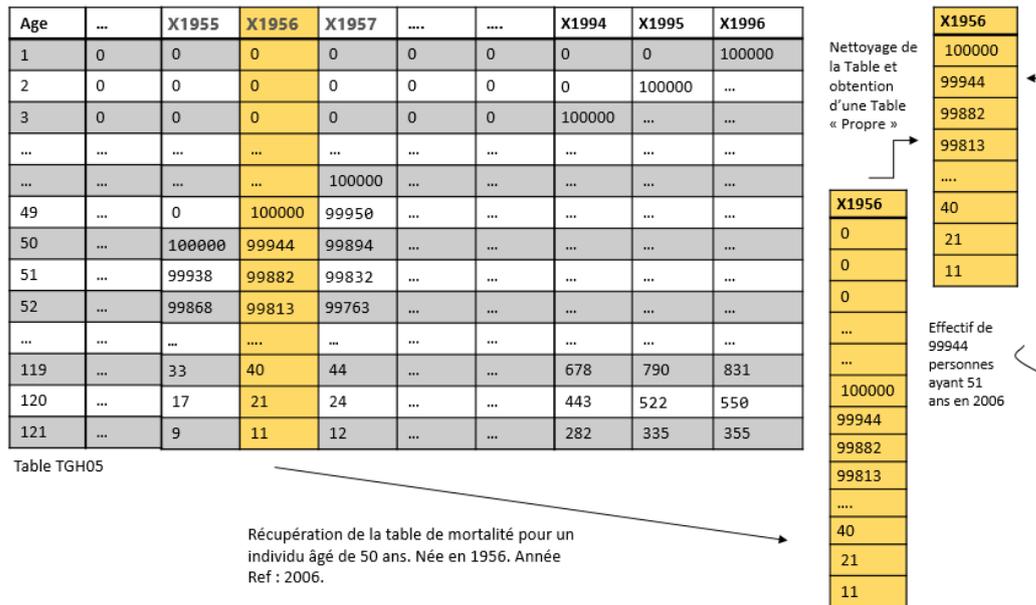


FIGURE 3.5 – Étapes pour pouvoir récupérer une table valide d'un individu née en 1956. (Année Ref : 2006)

Deux étapes donc :

- Étape 1 : Localisation des coordonnées (Age, Année) de l'assuré.
- Étape 2 : Nettoyer la table en supprimant les 0 des âges inférieurs

On se retrouve donc avec une table qui ressemble *en tout point* à une table du moment à la différence notable que la cohorte du départ est déjà âgée de 50 ans.

La variable **NombresDeLignes** dans l'algorithme précédemment présenté vaut ici $\text{NombresDeLignes} = 121 - 50 = 71$



De cette table-ci produite, on applique le modèle stochastique, et on retrouve les 5000 scénarios.

1 - Test de Comparaison avec la Table Base (Non améliorée) :

Il s'agit maintenant de comparer nos résultats de la table améliorée avec celle qu'on a utilisée pour obtenir cette amélioration.

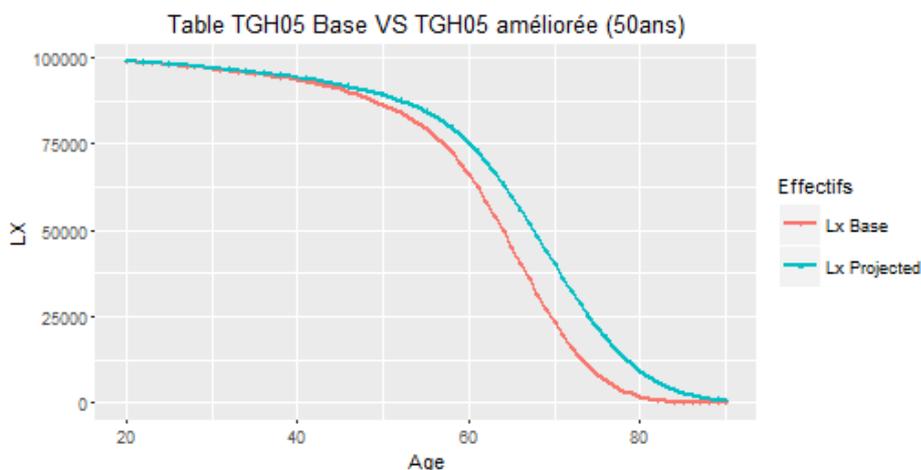


FIGURE 3.6 – Comparaison entre la TGH05 Base et la TGH05 améliorée

Le but étant d'obtenir une mesure (en nombre d'individus) pour comprendre de combien de personnes on a amélioré nos effectifs. Ce que l'on cherche, c'est typiquement le nombre de personnes qu'on a *sauvées* d'une mort certaine en utilisant l'ancienne table.

Pour cela, on recourt à la différence entre les deux courbes. C'est à dire que pour chaque âge, l'effectif qui n'est pas décédé. Et cela en **moyenne**.

On obtient donc pour la table TGH05, pour la table des personnes nées en 1956 (50 ans) : **5302.685** Individus.

Cette comparaison nous permet de visualiser deux choses : Que notre amélioration est bien réaliste, et de pouvoir permettre à un assureur de prendre en compte l'effectif moyen supplémentaire qu'il aura à subir en cas de choc.

Ici, il s'agit de 5.3% de la table qu'on a *sauvé*. Cette comparaison nous est utile pour avoir une vue sur le réalisme du modèle.



3.2.3.2 Projection avec la TH002 :

La projection avec la table réglementaire TH002 diffère assez sensiblement de notre précédente simulation. On rappelle que :

- La table TH002 est une table du moment.
- Les effectifs débutent tous au même âge : 0 ans.

C'est ce dernier point qui change l'utilisation de la table, il n'existe *qu'une seule table pour toutes les générations*. On cherche donc l'âge de l'assuré sur les lignes, alors que précédemment, l'âge de l'individu était corrélé à la colonne qui spécifiait sa génération (date de naissance).

Voici les étapes pour obtenir les 5000 scénarios pour chaque effectif :

- Étape 1 : Localisation de la coordonnée **Age** de l'assuré.
- Étape 2 : Réduire la projection à la portion qui va être impactée par la simulation.

Le schéma ci-dessus permet de comprendre la manœuvre : Une fois la table isolée obtenue, on applique la projection stochastique. En sortie, c'est 5000 simulations pour chaque effectif l_i pour $i \in [1, 111]$, qu'on obtient.

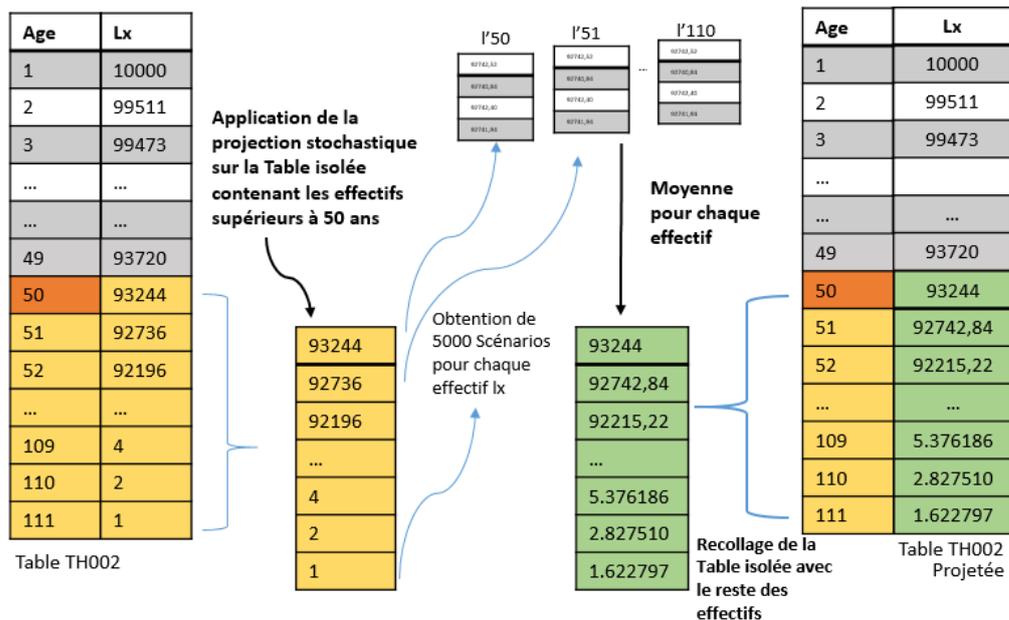


FIGURE 3.7 – Création d'une nouvelle table projetée suivant la moyenne pour chaque effectif.



Pour compléter, On peut prendre ensuite la moyenne de chaque effectif. Ce qui nous permet de replacer ses moyennes dans le reste de la table non impacté. Cela nous fournit une nouvelle *table du moment* qui nous permettra de comparer l'amélioration de la mortalité perçue.

1 - Test de Comparaison avec la Table Base (Non améliorée) :

De la même façon qu'avec la Table TGH05, on effectue la comparaison entre la table projetée TH002 et celle réglementaire de base, sans amélioration.

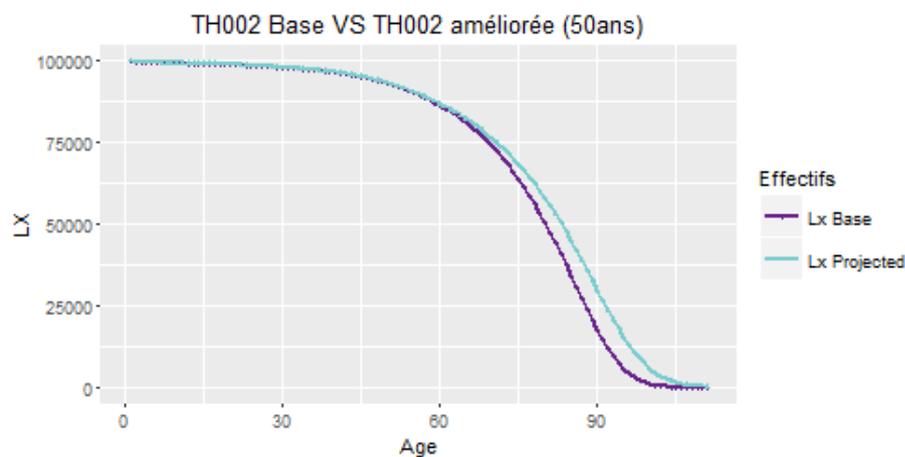


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la TH002 Base et la TH002 améliorée

On remarque ici, que l'axe des abscisses commence à 0 ans, et que la courbe LX_Projected commence à se décaler, à partir de $x = 50$. Cela est dû à la composition de la table qui commence toujours par un effectif d'un âge 0. On remarque bien que seule une partie des effectifs sont améliorées : ceux qui ont un âge supérieur à 50 ans.

En effectuant la différence entre les deux courbes, on trouve en moyenne : **2499.115** individus, ce chiffre n'est pas comparable à celui de la TGH05 car il ne s'agit pas du même effectif de départ pour les deux tables.

On multiplie donc cette donnée par un coefficient d'extrapolation. Qu'on définisse comme étant :

$$\Theta_{TH \rightarrow TG} = \frac{TG_{50ans}}{TH_{50ans}}$$

Avec TH_{50ans} l'effectif pour la table TH002 à 50 ans. Et TG_{50ans} l'effectif de départ qui est égal à **99062** pour une personne née en 1956.



On obtient ainsi :

- TH002 : **2620.825** Individus *sauvés*
- TGH05 : **5302.685** Individus *sauvés*

L'écart est de **2681.86** personnes entre les deux tables pour une personne âgée de 50 ans, de l'ordre de 2.68%, les deux tables ne sont donc pas similaires, la TGH05 prenant déjà en compte une amélioration de la mortalité entre la naissance et l'âge choisi.

Aucun souci technique n'aurait pu nous empêcher d'effectuer la suite de l'étude avec une Table TH002. Mais comme on l'avait précédemment rappelé, le produit choisi a une telle réglementation particulière en France que le choix d'une TGH05 s'applique unilatéralement pour la suite.

3.3 Calcul des chocs de mortalité :

3.3.1 Considérations préalable :

Ce qu'on nomme **chocs** dans solvabilité II est une donnée qui nous permet de répercuter un déterminisme négatif souhaité sur des données qui sont la plupart du temps aléatoire. **Le choc réglementaire utilisé dans cette section est de 20% selon le QIS5.**

Le choc de mortalité qu'on va essayer de déterminer dans cette partie obéit à l'hypothèse qu'il se doit d'être différent selon la durée de couverture du contrat. Et qu'il doit être localisé selon deux données : l'âge x et la durée de couverture n .

3.3.2 Détermination des chocs :

En suivant le déroulement de l'étude de Towers Perrin, l'étape suivante consiste à calculer des chocs de mortalité sur les q_x .

Towers essaie de comparer l'évolution de la population projetée avec celle de la population de base non-améliorée. ⁶ La principale difficulté a été de s'approprier le cheminement de l'étude du cabinet américain.

La méthode ne diffère pas de celle de l'étude de Perrin. On utilisera ici des notations propres :

- 1 : On calcule *la probabilité de décès* après **une durée $n \in [1, 2, 3..50]$** pour un individu X ayant atteint un âge x avec la *Table de Base non-améliorée*.



$${}_nq_x = P[T \leq x + n | T > x] = 1 - P[T_x > n] = 1 - \frac{l_{x,x+n}}{l_{x,x}} \quad (3.1)$$

Où T : la variable aléatoire représentant la durée de vie de l'individu.
Et T_x : la variable aléatoire représentant la durée de vie restante d'un individu ayant atteint l'âge x .

- 2 : On calcule la même probabilité de décès conditionnelle à l'âge x avec la *Table projetée*, **celle améliorée cette fois où :**

$${}_nq'_x = 1 - \frac{l'_{x,x+n}}{l_{x,x}} \quad (3.2)$$

Il est très important de remarquer que le l_x dans les notations est fixé selon l'âge : c.à.d que $l_x = l_{50} = 99062$ pour un individu né en 1956 et âgé de 50 ans (Ref. 2006) par exemple.

- 3 : Détermination des chocs : Le papier de Towers ne dit pas vraiment comment il compare les deux données présentées au dessus. Vraisemblablement, il s'agit de faire une division pour pouvoir introduire un ratio multiplicateur qu'on peut raisonnablement définir comme étant un choc, tel que :

$${}_nq'_x = Choc \times {}_nq_x \quad (3.3)$$

3.3.3 Algorithme de mise en œuvre :

L'algorithme utilisé suit fidèlement les étapes précédentes de la détermination des chocs. La subtilité réside dans le fait que les $l'_{x,x+n}$ soient des tableaux de 5000 variables, car on travaille toujours avec les 5000 scénarios projetés de la TGH05. Par cela, toutes les autres données qui en découlent sont elles aussi des tableaux de 5000 scénarios.



3.3. CALCUL DES CHOCS DE MORTALITÉ :

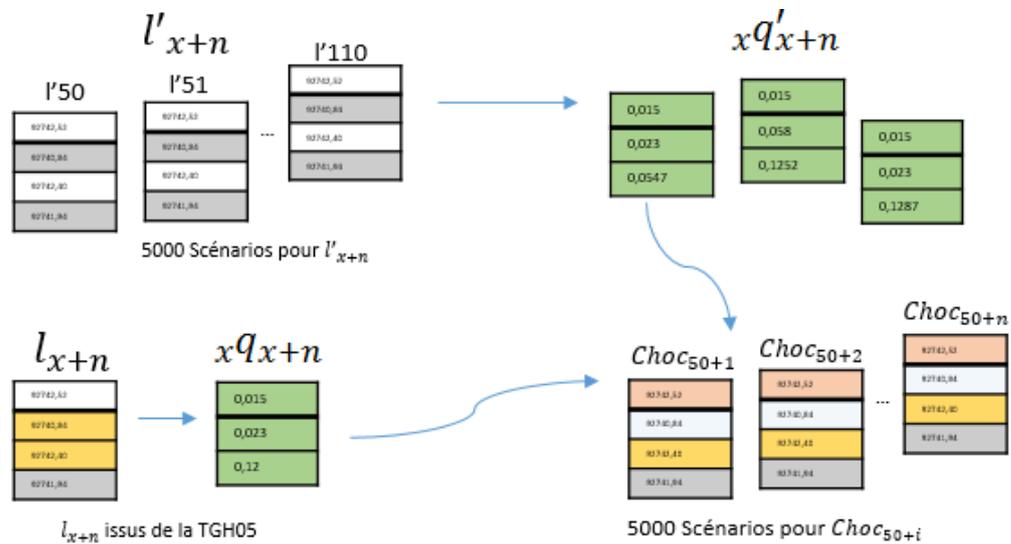


FIGURE 3.9 – Mise en œuvre et détermination des chocs

On obtient ainsi une réalisation de **5000 scénarios** pour un choc **localisé** pour un **âge** donné et une **durée de couverture** donnée qui suit une loi normale.

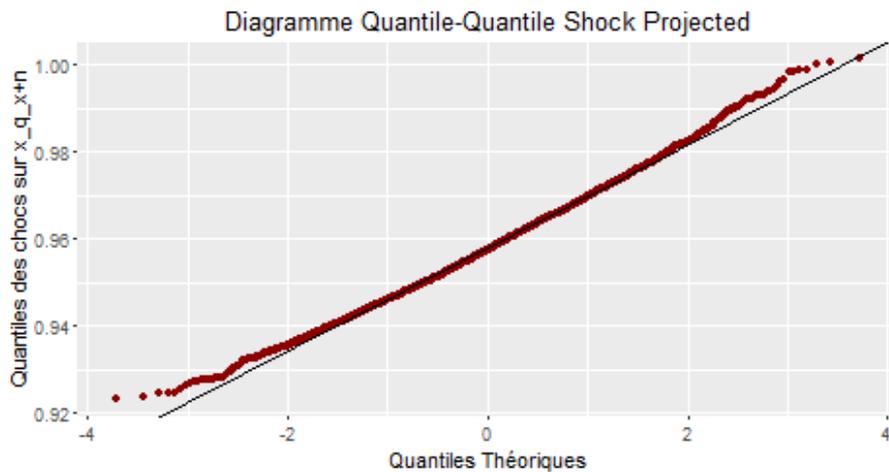


FIGURE 3.10 – Test de Normalité sur les chocs projetés sur nq_x

3.3.4 Risk measure :

Towers Perrin se proposent de calculer une mesure de risque qu'ils définissent comme étant la différence entre les intervalles de confiance au seuil 95% de la table des chocs projetés et celle à 50% tel que :



$$fm_{(50-95,x+n)} = IC_{(Choc,x+n)}(95\%) - IC_{(Choc,x+n)}(50\%) \quad (3.4)$$

Pour une personne âgée de $x = 50$ ans, avec une durée de couverture $n = 5$ ans par exemple, on retrouve :

$$IC_{(Choc,x+5)}(95\%) = [0.9650005, 0.9643843] \quad (3.5)$$

$$IC_{(Choc,x+5)}(50\%) = [0.9647664, 0.9646184] \quad (3.6)$$

On en déduit la *Risk measure* en faisant la différence des deux équations du dessus d'où :

$$fm_{(50-95,x+n)} = [0.0002341138, -0.0002341138] \quad (3.7)$$

On peut interpréter cette mesure du risque, comme étant l'intervalle d'erreur auquel le choc de mortalité projeté peut être soumis. Bien sûr, d'autres mesures de risques existent qui peuvent tout aussi être utilisées.

3.3.5 Résultat de la projection des chocs :

On obtient **5000 scénarios** pour **un âge** fixé et **une durée** de couverture donnée, il faudrait en toute rigueur lancer 50 simulations, en changeant à chaque fois ses paramètres et faire la moyenne sur les 5000 scénarios pour chacun des chocs projetés selon les tranches d'âge souhaitées.

On choisit 6 individus âgés respectivement de $[-30,40,.,80-]$ ans, pour des durées de couverture qui s'étalent de 5 à 20 ans. C'est un choix arbitraire représentatif des tranches d'âge étudiées par Towers Perrin.

Âge	Durée de couverture			
	5ans	10ans	15ans	20ans
30 ans	4.72%	8.20%	12.00%	15.59%
40 ans	4.92%	8.44%	11.28%	14.60%
50 ans	3.53%	6.55%	10.96%	15.22%
60 ans	5.30%	9.44%	13.88%	17.275%
70 ans	5.75%	9.28%	10.58%	10.26%
80 ans	3.93%	3.69%	2.70%	1.68%

TABLE 3.3 – Chocs de mortalités par Âge/Durée



3.3. CALCUL DES CHOCS DE MORTALITÉ :

On essaie ensuite de comprendre comment les chocs se comportent même au delà de 20 ans, cela, pour avoir un enseignement général de l'attitude des chocs projetés, les courbes ci dessous présentent cette évolution :

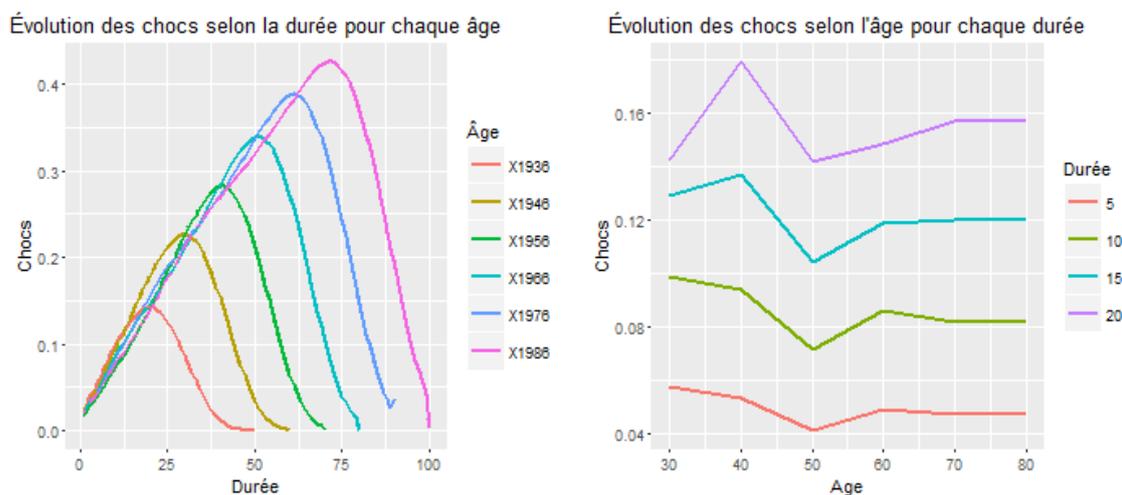


FIGURE 3.11 – Évolution des chocs selon la Durée/Âge

On peut décrire quelques observations quant à ces résultats :

- Pour les durées de couverture inférieures (5 et 10 ans) les chocs oscillent entre les mêmes valeurs avant de s'effondrer brutalement à partir de 70 ans. Pour les durées supérieures (15 et 20 ans) les chocs dressent une augmentation avant de connaître un même basculement vers le bas à partir de 60 ans. **Dans les deux cas, les chocs décroissent quand l'âge augmente à partir d'un certain temps.** L'explication est que pour des petites durées de couverture, l'assuré a peu de temps pour bénéficier de l'amélioration de la mortalité, ce qui explique la variation assez grande avec l'âge des durées de couverture élevées. Cette variation est corrélée avec les coefficients d'amélioration de la mortalité.
- En scrutant la courbe de droite, **les chocs de mortalité croissent quand la durée de couverture augmente.** Pour chaque âge, le basculement des chocs vers le bas est fonction de sa durée de couverture. Un assuré ne pouvant avoir une durée de couverture qui dépasse sa date de décès. Enfin, **plus la durée de couverture augmente plus il bénéficie de l'amélioration de la mortalité**, et plus son contrat sera **exposé** à un choc plus grand.
- Le fait que notre **table des coefficients d'amélioration de la**



mortalité ne suggère pas une amélioration notable pour les personnes jeunes avec un âge strictement inférieur à 50 ans explique pourquoi le choc n'est pas très élevé pour cette catégorie d'âge. Ainsi, à la différence des résultats de Towers où la table des coefficients d'améliorations de la mortalité en donne une meilleure amélioration, dans le contexte Français, c'est **la catégorie d'âge 60-69 et 70-79** qui améliore le mieux sa mortalité. Ils sont ainsi logiquement pénalisés par des chocs plus importants.

Cette partie sur la projection de chocs de mortalité apporte une certaine concordance avec les résultats de Towers Perrin. Néanmoins, les chocs de longévité calculés montrent leur étroite corrélation avec les facteurs d'amélioration de la mortalité. Le contexte particulier de la France qui n'améliore pas énormément la mortalité des personnes d'un âge inférieur à 50 ans permet de dégager une différence avec l'étude du cabinet américain : **Les chocs de longévité ne sont pas toujours décroissants avec l'augmentation de l'âge** ⁷ ils le sont uniquement à partir d'un certain âge et selon l'amélioration de la mortalité de la tranche d'âge étudiée.

7. "In the above table it is clear that the longevity shock decreases as the age increases and increases with duration." Cf. Page 20 Towers Perrin : Longevity Risk Investigation

Chapitre 4

Calcul du capital de solvabilité requis (SCR) :

Cette partie concerne le calcul du capital de solvabilité requis (SCR), pour rappel, il s'agit d'un seuil de capital nécessaire dont doit disposer l'assureur pour qu'il puisse pallier à ses engagements pour un temps donné, et pour un niveau de confiance défini. Pourquoi calculer le SCR ? C'est pour permettre de montrer l'inadéquation d'un choc à 20% sur les q_x mais en utilisant une autre méthode se basant sur le capital requis comme moyen d'investigation en haut et lieu de la méthode précédente qui consistait à reconstruire de nouveaux chocs.

4.1 Le SCR : Une VaR à 99.5% :

Le SCR est techniquement une mesure de risque, c'est une VaR¹ définie avec un seuil à 99.5% qui équivaut à la probabilité de faire défaut de 1 sur 200 ans. Son horizon temporel est d'une année. Par exemple pour une distribution de sinistre d'un portefeuille ordonné d'une façon croissante le SCR équivaut au niveau de sinistralité qu'il ne faut surtout pas dépasser :

$$P(\text{Sinistralité} < \text{SCR}) = 99,5\% \quad (4.1)$$

La sinistralité qui nous concerne dans cette présente étude est les engagements en rentes que doit déboursier l'assureur.

Le SCR qu'on calcule ici doit suivre le cheminement suivant, cette méthode de calcul est celle mise en perspective depuis le QIS5, il s'agit de :

- Déterminer les engagements en capital.
- Calculer des provisions mathématiques en *Best Estimate*.
- Appliquer des *stress tests* (chocs) à ces provisions mathématiques en méthode *Best Estimate*.

— Détermination du SCR.

Le SCR qu'on se propose de calculer ici est le $SCR_{life\ Longevity}$ qui rentre lui même en compte dans la composition du SCR_{life}

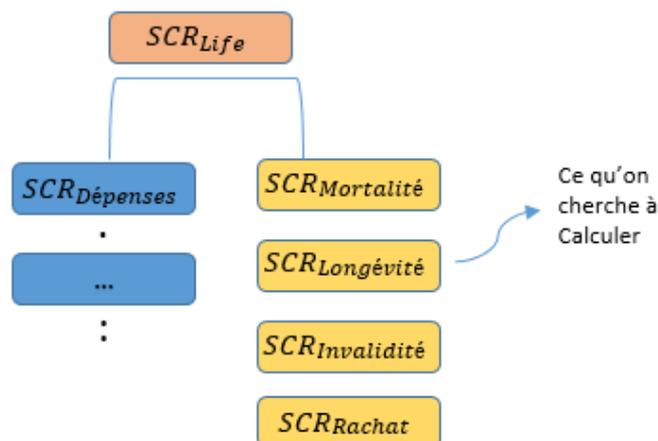


FIGURE 4.1 – Composition du SCR_{life} décomposé en plusieurs sous-SCR

Pour simplifier la notation tout au long de la suite de ce chapitre, on notera le $SCR_{longévité}$ avec la notation simplifiée en SCR. Car il n'y a pas motif à mélanger plusieurs notations sachant qu'on ne calcule qu'une seule donnée de ce type.

La méthode pour déterminer le SCR consiste à effectuer le calcul en simulation des provisions mathématiques impactées contre celles engagées réellement par l'assureur tel que :

$$SCR_{Réglementaire} = BE(Choc + 20\%) - BE \quad (4.2)$$

$$SCR_{équivalent} = BE_{Projected}(99.5\%) - BE_{Projected}(50\%) \quad (4.3)$$

Avec BE, les Provisions mathématiques calculées en méthode Best Estimate. On définit :

$SCR_{Réglementaire}$: Le SCR calculé avec le choc en-une-fois de 20% il s'agit de la méthode réglementaire recommandée par l'EIOPA² lors de l'étude

1. Mesure d'être certain pour un seuil de confiance donné α de ne pas perdre plus de VaR à un horizon T : $VaR(X; \alpha) = \inf\{x, P(X \leq x) \geq \alpha\} = F^1 X(\alpha) = Q(\alpha)$



QIS5.

$SCR_{Réquivalent}$: Le SCR obtenu par simulation de différents scénarios du Best estimate avec les tables projetées obtenues précédemment qui prennent en compte les différents impacts sur la mortalité en fonction de l'âge et de la durée de couverture.

C'est la comparaison entre ces deux SCR qui nous permettra d'apprécier la pertinence du choc en-une-fois de 20% recommandé par les autorités compétentes.

4.2 Le Best Estimate :

Ce qu'on appelle couramment Best Estimate est un calcul des provisions mathématiques ² avec une méthode définie selon l'ACPR comme étant :

« La meilleure estimation est égale à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinent. »

Pour rappel, la formule applicable en ce sens est :

$$BE = \sum_t^n \frac{CF_t}{(1 + r_t)^t} \quad (4.4)$$

Où, pour $\forall t \in [0, T]$

- CF_t : Les flux de trésorerie non actualisés (Brut) des engagements d'assurance Vie
- r_t : Les taux d'intérêt de la courbe des taux zero-coupon.
- n : La durée de couverture soldant l'engagement total du portefeuille.

4.2.1 Détermination des flux de trésorerie CF_t :

Intéressons nous maintenant au calcul de CF_t :

2. L'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (AEAPP), en anglais European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) est un organe consultatif auprès de l'Union européenne qui regroupe l'ensemble des autorités de contrôle des états participants dans le cadre de la réforme Solvabilité II.

2. Les provisions mathématiques sont des engagements pris par les compagnies d'assurance, il s'agit d'un passif important des compagnies qui est réglementé par le code des assurances.

Comme on l'avait décrit au paragraphe 1.2.2 de la section précédente, le contrat choisi est un contrat de rentes vieillesse. On le décrit plus précisément ici, tel que :

- $R = 1200 \text{ €}$: Montant de la rente.
- $\alpha = 3\%$: Frais de gestion du contrat.
- n : La durée de couverture du contrat en année.
- La rente est versée **au début** de chaque année : $t_0 = 0$

Le versement des flux de trésorerie est conditionné à la probabilité de survie de notre assuré, CF_t s'écrit donc :

$$CF_t = R \times (1 + \alpha) \times \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{4.5}$$

Ici, la table utilisé est une TGH05, d'où $l_x = l_{50} = 99062$ pour un individu né en 1956 et âgé de 50 ans (Ref. 2006)

4.2.2 Calcul du Best Estimate - Méthode Réglementaire :

On cherche maintenant à calculer le Best Estimate en prenant en compte le choc en-une-fois de 20% recommandé par l'EIOPA. Ce calcul nous servira à déterminer le SCR Réglementaire pour la section suivante.

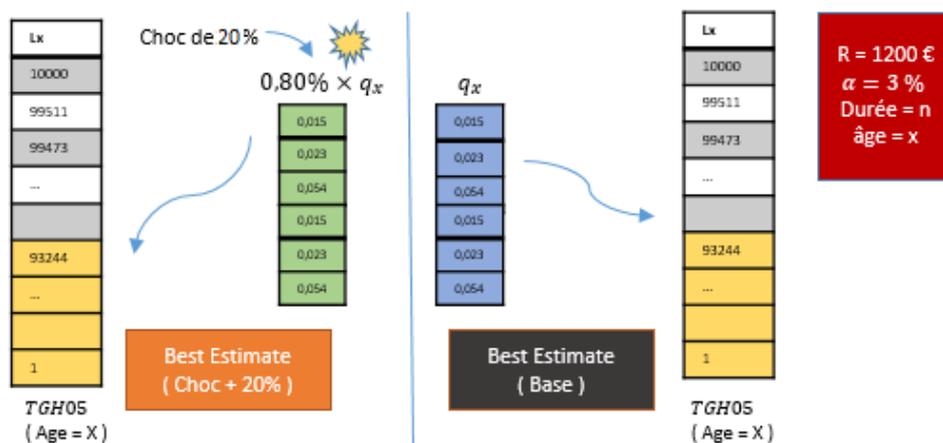


FIGURE 4.2 – Calcul Best Estimate réglementaire

Il ne faut pas oublier que ce calcul est spécifique à une durée n déterminée et à un âge fixé tel que :



$$BE(Base) = \sum_t^n \frac{R \times (1 + \alpha) \times \frac{l_{x,x+t}}{l_{x,x}}}{(1 + r_t)^t} \quad (4.6)$$

$$BE(Choc + 20\%) = \sum_t^n \frac{R \times (1 + \alpha) \times \frac{(1 - 0.8 \times q_{x+t-1}) \times l_{x,x+t-1}}{l_{x,x}}}{(1 + r_t)^t} \quad (4.7)$$

Avec $l_x = l_{50} = 99062$ pour un individu né en 1956 et âgé de 50 ans (Ref. 2006) par exemple.

On effectue ensuite le Calcul pour différentes durées de couverture, on peut illustrer les résultats partiels pour un assuré âgé de 50 ans avec des durées de couverture de 5 ans :

Durée \ BE	BE(Base)	BE(Choc+20%)
5 ans	6186.028 €	6205.488 €
10 ans	12123.126 €	12216.728 €
15 ans	17382.831 €	17607.397 €
20 ans	21902.304 €	22307.817 €
25 ans	25769.911 €	26415.697 €

TABLE 4.1 – Best Estimate/Durée

On remarque que l'engagement de l'assureur augmente lorsque les assurés vivent plus longtemps. Cela reste cohérent car il doit provisionner plus de fonds pour pouvoir répondre à ses engagements. La différence des deux Best Estimate donne le SCR qu'on calculera dans une section appropriée par la suite.

4.2.3 Calcul du Best Estimate - Méthode équivalent :

Le Best Estimate équivalent prend lui aussi en compte l'amélioration de la mortalité, mais en utilisant le modèle développé par Towers Perrin qui permet d'obtenir des chocs localisés pour certains âges et certaines durées de couverture. C'est grâce à ces tables d'amélioration projetées qu'on pourra calculer le Best Estimate équivalent et en déduire ainsi le calcul du SCR approprié.

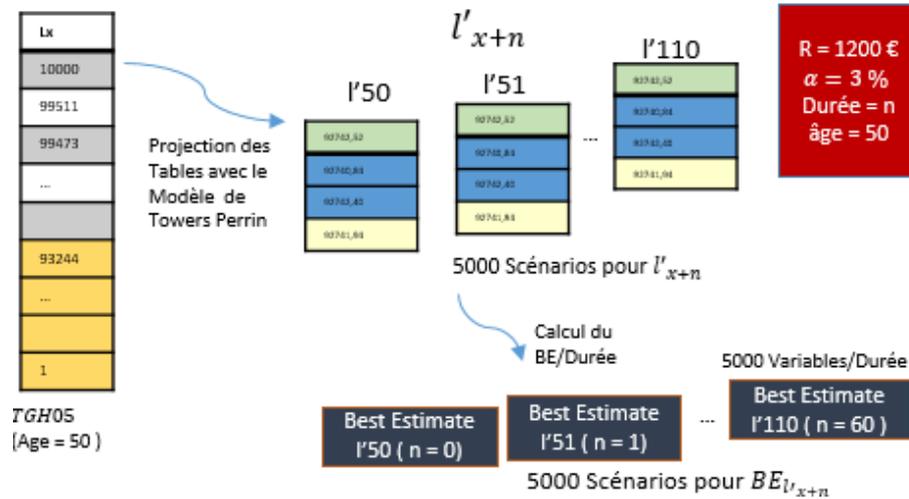


FIGURE 4.3 – Calcul Best Estimate équivalent pour un assuré âgé de 50 ans

On utilise pour ce calcul la formule modifiée précédente pour le BE, la seule différence est que les $l'_{x,x+n}$ sont des vecteurs de 5000 variables. On obtient en sortie des Best Estimate de 5000 réalisations, cela pour chaque durée et pour chaque âge fixé avec :

$$BE_{Projected} = \sum_t^n \frac{R \times (1 + \alpha) \times \frac{l'_{x,x+t}}{l'_{x,x}}}{(1 + r_t)^t} \quad (4.8)$$

Il suffit ensuite d'ordonner ce dernier Best Estimate pour la durée/âge voulue d'une façon croissante, et en déduire le SCR avec la formule (2.3) précédemment décrite.



4.3 Calcul du SCR :

Une fois toutes les données préliminaires acquises, on peut s'atteler à l'analyse du Capital de solvabilité requis (SCR). Cette partie s'intéressera aussi au comportement du SCR selon les paramètres de l'âge et de la durée de couverture fixée. On essaie toujours par là de challenger le modèle réglementaire qui impose ce choc en-une-fois.

4.3.1 SCR Réglementaire VS SCR équivalent :

On rappelle les deux équations du SCR :

$$SCR_{Réglementaire} = BE(Choc + 20\%) - BE \quad (4.9)$$

$$SCR_{équivalent} = BE_{Projected}(99.5\%) - BE_{Projected}(50\%) \quad (4.10)$$

On se propose ici de comparer le comportement des deux SCR selon différents âges [—30,40,...70,80—] ans et pour des durées qui s'échelonnent entre 5 et 50 ans. Voici une illustration des résultats pour un individu né en 1956 (50 ans) :

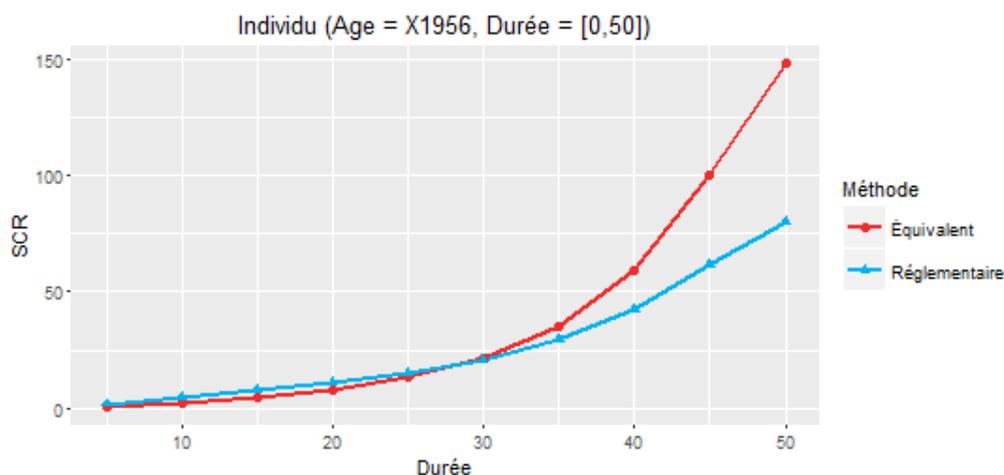


FIGURE 4.4 – SCR Réglementaire VS SCR Équivalent

Voici quelques observations préalables pour ce cas particulier :

 **CHAPITRE 4. CALCUL DU CAPITAL DE SOLVABILITÉ REQUIS (SCR) :**

1 - On remarque que le SCR réglementaire est surévalué pour des durées courtes et sous-évalué pour des durées de couverture longues. On remarque aussi un point de convergence pour les deux courbes qui est fixé à une durée de 25.12 ans pour une personne âgée de 50 ans.

2 - Plus la durée de couverture augmente et plus il faudrait avoir un SCR élevé et plus l'assureur devra provisionner de fonds propres pour pallier à ses engagements.

3 - On peut aussi remarquer que le SCR équivalent plus grand, présente les mêmes conclusions que pour l'étude sur les chocs de mortalité. Le choc et le SCR augmente avec la durée de couverture, car l'assuré a plus de temps pour bénéficier de l'amélioration de sa mortalité.

On se propose maintenant d'effectuer 6 simulations pour 6 catégories d'âges et autant de durées de couverture entre 0 et 50 ans. Voici le tableau des données des SCR Réglementaire VS SCR Équivalent pour quelques âges :

Durée \ SCR	SCR					
	R1936	E1936	R1956	E1956	R1976	E1976
Durée 5	7.761	2.33	1.83	0.42	0.29	0.11
Durée 10	22.77	13.30	4.63	2.06	0.74	0.53
Durée 15	45.26	39.43	7.65	4.68	1.38	1.40
Durée 20	77.13	90.24	10.98	8.23	2.25	2.86
Durée 25	116.034	166.71	15.20	13.51	3.45	5.09
Durée 30	147.86	243.62	20.95	21.78	4.76	7.59
Durée 35	164.22	296.41	29.24	35.26	6.092	10.160
Durée 40	169.17	320.53	42.30	59.44	7.48	12.80
Durée 45	169.96	327.47	61.53	100.06	9.10	15.82
Durée 50	170.01	328.64	80.28	148.28	11.11	19.53

TABLE 4.2 – Tableau des SCR Équivalents (E) et SCR Réglementaires (R) pour quelques âges particuliers

Avec ces données, on sort les simulations graphiques pour les 6 catégories d'âges décrites plus haut :

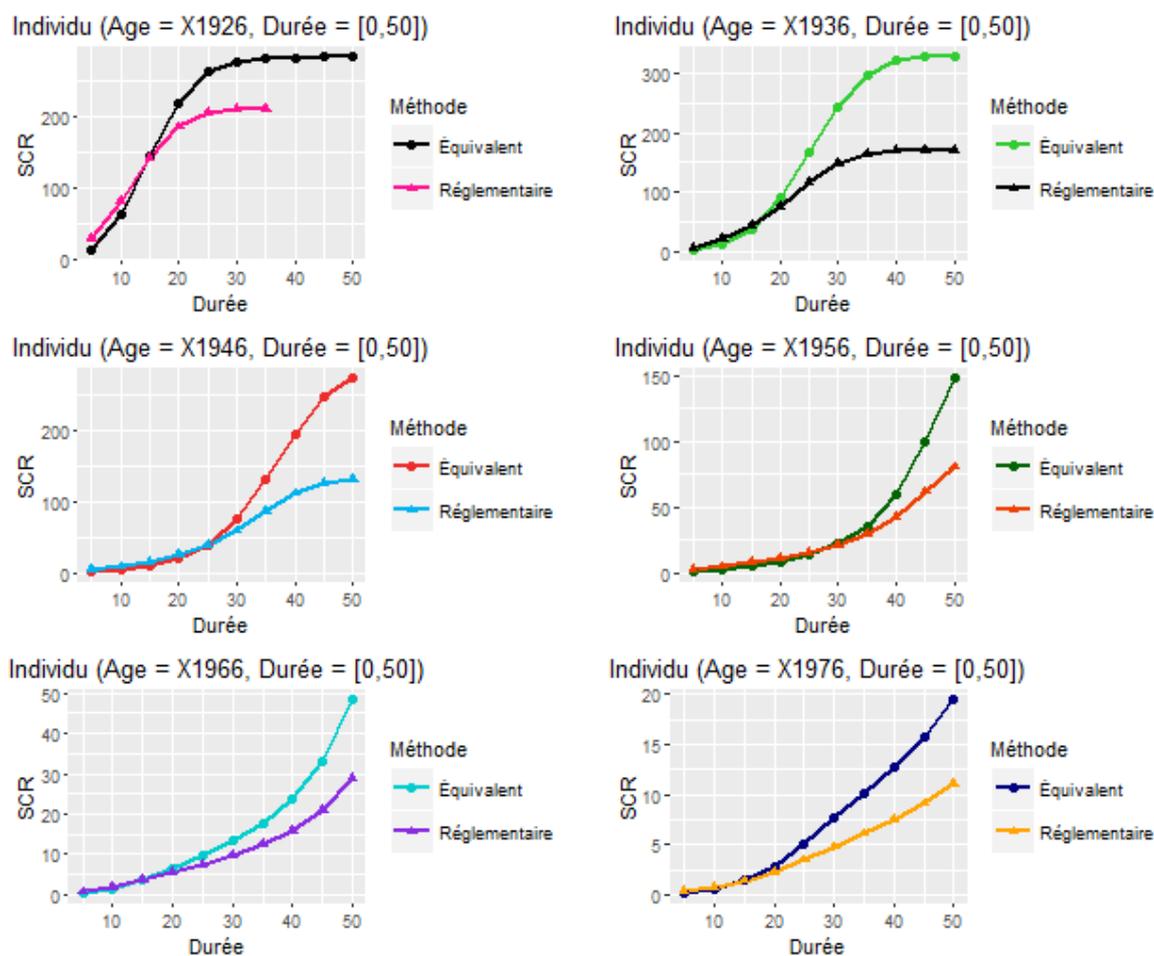


FIGURE 4.5 – Comparaison entre le SCR Réglementaire et le SCR Équivalent

On peut remarquer d'emblée que, ce que l'on a pu apercevoir pour le cas **particulier** avec un âge de 50 ans se vérifie dans le cas **général**. **Le SCR réglementaire est sur-évalué pour les petites durées de couvertures**. Plus particulièrement, on peut observer que :

1 - Plus la durée de couverture augmente plus l'écart se creuse entre les deux SCR. Cette écart est le plus important pour les deux âges 60 (X1946) et 70 ans (X1936). Cela n'est pas un hasard, il s'agit des tranches d'âges qui ont le plus amélioré leur mortalité en France. Cela rejoint notre argumentaire quant aux rôles des coefficients d'amélioration de la mortalité.

2 - Le SCR croît quand l'âge augmente, cela est logique car l'assureur doit provisionner plus de fonds propres. On peut surtout remarquer que la croissance du SCR est différente selon la durée de couverture. Elle est

extrêmement rapide pour les âges grands. C'est le comportement normal d'un SCR, cela est rassurant pour la cohérence de nos résultats.

4.3.2 Durée de Convergence des SCR :

On a pu remarquer précédemment, que les deux SCR Réglementaire et Équivalent convergent inéluctablement vers un moment. Cette donnée nous permettra de se positionner vis à vis du calibrage du modèle Réglementaire.

On déduit du précédent tableau et de la courbe les durées de convergence pour chaque âge, on utilise une méthode graphique qu'on implémente sur un tableau, on obtient les résultats suivants avec R :

Naissance	1926	1936	1946	1956	1966	1976	1986
Durée de convergence	14.5	16.43	25.00	29.12	15.3	14.79	15.01

TABLE 4.3 – Durée des convergences pour chaque âge

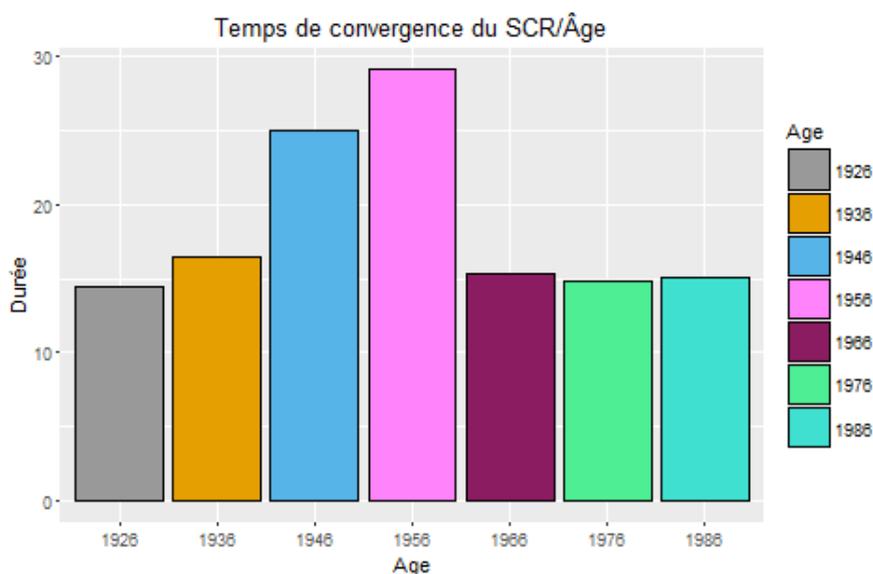


FIGURE 4.6 – Durée des convergences/Âge

On remarque deux choses principales :

1 La durée de convergence croît entre 1926 et 1956 pour atteindre un pic pour ce dernier âge.



2 A partir de 1956, la durée de convergence décroît pour les âges jeunes pour rester constante.

Quel est l'enseignement qu'on peut en déduire ?

On pense raisonnablement que si la durée de convergence est grande, alors :

- 1 **Le SCR réglementaire couvrira les grandes durées de couverture et sera adapté pour celle-ci.**
- 2 **Le SCR réglementaire impactera négativement les petites durées de couverture et sera sur-évalué pour celle-ci.**

1 - On peut expliquer cela par le fait que si cette durée de convergence est grande, le SCR réglementaire permettra de couvrir l'écart avec le SCR équivalent d'une façon très raisonnable jusqu'à une certaine durée de couverture. Néanmoins cette *adaptation* dépend de l'âge de l'assuré. Car même si la durée de convergence est grande, si un assuré dispose d'un très jeune âge cela sera handicapant pour l'assureur.

Illustrant cela par un exemple :

Prenant la courbe Γ_{X1956} : le SCR réglementaire permet de couvrir le SCR équivalent jusqu'à une durée de **29.12** ans (durée de convergence), donc jusqu'à ce que l'assuré ait atteint l'âge **79.2 ans** (=50+29.12). À partir de cet âge là, le SCR réglementaire n'est plus pertinent, et l'assureur devrait raisonnablement provisionner plus de fonds propres.

Pour la courbe Γ_{X1946} et Γ_{X1936} la convergence coïncide resp. avec les âges **85** et **86.43**. De plus, pour un individu âgé de **80** ans en 2006 (Γ_{X1926}), la couverture par le SCR réglementaire dépasse la veille de ses **94.5** ans !

À contrario, pour des âges jeunes, la date de convergence n'est pas raisonnable, pour les courbes Γ_{X1966} , Γ_{X1976} et Γ_{X1986} (non représentées), les durées de convergence sont resp. **15.3, 14.79, 15.01** ans, ce qui handicapera l'assureur dès que ces personnes atteindront les âges **55.3 ans, 44.79** et **35.01**. Il devra à partir de ce moment provisionner plus.

2 - Le SCR réglementaire est supérieur au SCR équivalent pour les durées de couverture courtes, et cela, pour tous les âges. Ce qui veut dire que l'assureur provisionne plus de fonds propres qu'il ne lui en faut, et cela est vrai pour tous les âges et pour toutes les durées de couverture qui s'échelonnent de 5 à 15 ans.

Conclusion :

Ce bureau d'étude s'est proposé tout au long de ce mémoire, d'expliquer, de comprendre, et d'expliquer les méthodes utilisées pour parvenir à apprécier rigoureusement le risque de longévité. L'étude conduite précédemment par Towers Perrin a été un outil de travail qui a permis de mettre en place un modèle sur pied, et l'utiliser pour parvenir à des résultats cohérents. Néanmoins, on a pu s'affranchir d'une *stricto sensu* reproduction de l'étude du cabinet américain, ce qui nous a permis d'asseoir de meilleurs schémas pour notre travail.

Synthèse pour les deux approches :

Construction des chocs avec les tables projetées :

- Plus la durée de couverture diminue, moins l'assuré dispose de temps pour bénéficier de l'amélioration de la mortalité. Le choc, basé sur cette amélioration diminue également.
- Le modèle utilisé par Towers est très dépendant des coefficients d'amélioration de la mortalité, si ceux-là sont élevés, alors les chocs vont être irrémédiablement élevés même si les âges concernés sont sujets à une mortalité plus grande.
- Les chocs décroissent quand l'âge augmente, **mais à partir d'un certain temps seulement**, et sont **fonction des coefficients d'amélioration de la mortalité**, c'est un résultat différent de l'étude de Towers Perrin.

Calcul du capital de solvabilité requis :

- Les résultats sur la durée de convergence ont permis de démontrer que **le choc réglementaire sur les q_x ne permet pas d'avoir un capital requis suffisant pour des contrats de personnes avec à la fois, des âges jeunes et avec des durées de couverture longues**. L'âge jeune de ces personnes rentrent dans les tranches d'âge inférieur strictement à 49 ans. Le choc réglementaire reste par



- contre très raisonnable pour des personnes avec un âge supérieur à 60 ans et même sur-évalué par moment.
- Le SCR réglementaire est en général **sous-évalué** pour les durées de couvertures **longues** et **sur-évalué** pour les **petites** durées de couverture.
 - Le SCR quel qu'il soit augmente avec la durée de couverture, car l'assuré a plus de temps pour bénéficier de l'amélioration de la mortalité.

Limitations et critiques du modèle :

- La table de l'INSEE utilisée pour calculer les facteurs d'amélioration de la mortalité est mise à jour depuis **1975**. Towers Perrin utilise une table de ratio de mortalité qui contient des données depuis **1956**. C'est peut être ce qui explique le fait que l'amélioration de la mortalité est plus conséquente sur les tranches d'âge 60-69 et 70-79. La France étant un pays connue pour son système de sécurité social hérité de la fin de la deuxième guerre mondial, l'hypothèse est que, l'amélioration de la mortalité des plus jeunes est meilleure que celle des autres pays de l'Europe.
- Le modèle de Towers Perrin est très dépendant des facteurs d'amélioration de la mortalité, il aurait été intéressant de faire des tests sur le poids de ses coefficients lors des différentes simulations. Cela est malheureusement lourd en ressources et on a choisi de ne pas se focaliser sur cela.
- La majorité des souscripteurs des contrats vieillesse sont des assurés d'un certain âge. Cela est-il vrai de dire que le SCR réglementaire impacte négativement l'assureur pour les âges jeunes ? On ne dispose pas de statistiques sur l'âge du portefeuille des compagnies pour étayer cette idée.
- L'étude a été entièrement faite avec une table de rente TGH05, nous ne sommes pas allés jusqu'au bout de l'étude avec une TH002, cela aurait pu être intéressant de pouvoir effectuer une comparaison.
- Un autre modèle pour la détermination du choc de longévité existe, c'est le modèle Milliman. On a choisi arbitrairement celui de Towers Perrin.



Développements Futurs :

- La TGH05 qu'on a utilisée prend en compte déjà une amélioration de la mortalité, il aurait été intéressant d'étudier le comportement du modèle en faisant abstraction de cette amélioration.
- La Table de l'INSEE relatives aux taux de mortalité par groupes d'âge qu'on a utilisé est celle sur l'ensemble de la population. Une étude différenciée par genre aurait été porteuse de riches enseignements (Chocs différenciés, SCR peut être plus important pour les femmes etc...)
- Notre étude s'évertue à prédire le futur en utilisant le passé, cela reste une description sans prise en compte d'autres facteurs liés à la politique de santé, des avancées de la science etc... Il n'est pas raisonnable de penser que l'humanité connaîtra un tel bond de longévité aussi impressionnant que celui du siècle dernier, enfin, cela reste une hypothèse, à prédire...

Remerciements

On souhaite remercier pour ce travail nos différents professeurs de l'Euro-Institut Actuariat qui nous ont permis d'aboutir à ce travail. On souhaite tout particulièrement remercier Mme. Françoise PENE pour son suivi régulier et son très grand investissement personnel pour la réussite de ce bureau d'étude, pour sa gentillesse et ses remarques toujours rigoureuses et pertinentes.

On souhaite remercier notre encadrant professionnel M. Anthony NAHELOU pour sa grande disponibilité et sa patience pour nos inlassables questions tout au long de cette année.

Mme. Pauline SALAUN pour sa précieuse aide sur Solvabilité II, et M. Franck VERMET pour avoir toujours répondu à nos questions avec son habituelle sympathie.

References

- [1] Eva BENROS Solvabilité II : Calibrage des MCR/SCR dans le contexte QIS4, DUASS
- [2] Lamia LOURAOUI : Assurance dépendance : étude prospective du besoin de capital sous Solvabilité 2, Paris-Dauphine
- [3] I.LOZANO A.MERINO J.MARCH C.PEREZ Proyeccion y estudio de una poblacion el papel de la Mortalidad, UCM, <http://eprints.ucm.es/6765/1/0203.pdf>
- [4] J.MANDZIJ Risque de longévité Construction des tables de mortalité prospectives, Modèle Interne Partiel, ISFA
- [5] V.RUSSO : Pricing and managing life insurance risks, University of Bergamo
- [6] F.PLANCHER Risque de longévité et détermination du besoin en capital <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00443005> HAL
- [7] Society Of Actaries, A World of Mortality Issues and Insights Seminar, May 23, 2012, Session 7 – Mortality Improvement
- [8] TOWERS PERRIN, UNESPA, Longevity Risk Investigation
- [9] Universidad del País Vasco, A Measure of the Mortality-Risk for the Death-Group, IbIt 2014

Annexe A

Formules et notations :

On utilise régulièrement ses différentes notations :

- x : L'âge de l'assuré.
- l_x : Le nombre de vivants à l'âge x .
- d_x : Le nombre de décès entre l'âge x et $x + 1$.

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

- T_x : Variable aléatoire représentant la durée de vie restante d'un individu ayant atteint l'âge x .
- p_x : Probabilité pour qu'un individu d'âge x soit encore vivant à $x + 1$.

$$p_x = P[T_x > 1] = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

- q_x : Probabilité qu'un individu ayant atteint l'âge x décède avant d'atteindre l'âge $x + 1$

$$q_x = P[T_x \leq 1] = 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Annexe B

TH002 :

Age	Lx	27	98198	55	89665	83	37546
0	100000	28	98091	56	88929	84	34072
1	99511	29	97982	57	88151	85	30575
2	99473	30	97870	58	87329	86	27104
3	99446	31	97756	59	86460	87	23707
4	99424	32	97639	60	85538	88	20435
5	99406	33	97517	61	84558	89	17338
6	99390	34	97388	62	83514	90	14464
7	99376	35	97249	63	82399	91	11852
8	99363	36	97100	64	81206	92	9526
9	99350	37	96939	65	79926	93	7498
10	99338	38	96765	66	78552	94	5769
11	99325	39	96576	67	77078	95	4331
12	99312	40	96369	68	75501	96	3166
13	99296	41	96141	69	73816	97	2249
14	99276	42	95887	70	72019	98	1549
15	99250	43	95606	71	70105	99	1032
16	99213	44	95295	72	68070	100	663
17	99163	45	94952	73	65914	101	410
18	99097	46	94575	74	63637	102	244
19	99015	47	94164	75	61239	103	139
20	98921	48	93720	76	58718	104	75
21	98820	49	93244	77	56072	105	39
22	98716	50	92736	78	53303	106	19
23	98612	51	92196	79	50411	107	9
24	98509	52	91621	80	47390	108	4
25	98406	53	91009	81	44234	109	2
26	98303	54	90358	82	40946	110	1

Annexe C

Pyramide des âges

On utilise la pyramide des âges au 1er janvier 2016 France :

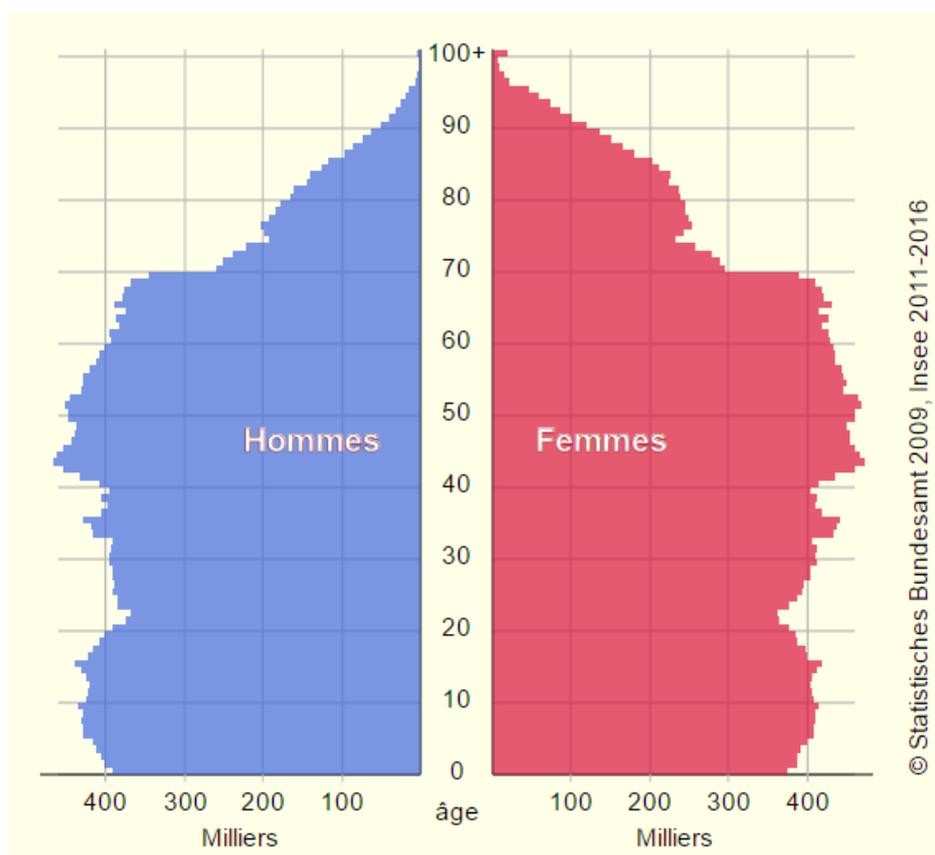


FIGURE C.1 – Pyramide des âges au 1er janvier 2016 France

Téléchargeable ici : [Pyramide des âges au 1er janvier 2016 France](#)

Annexe D

Taux de Mortalité :

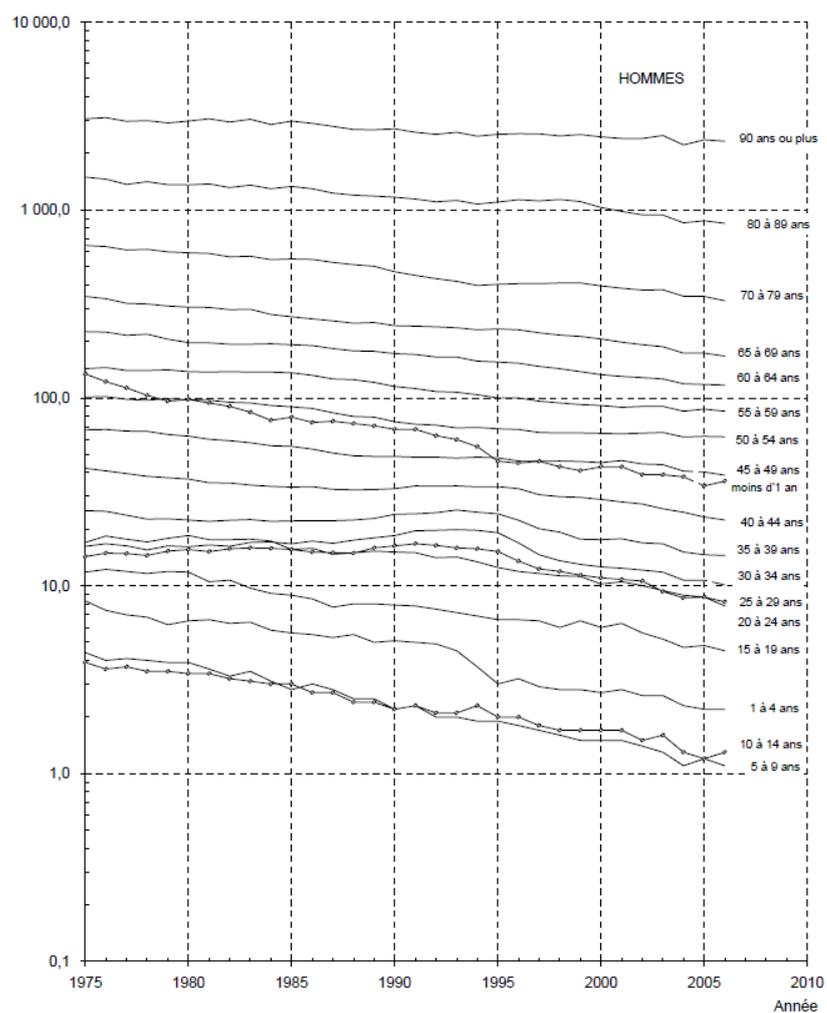


FIGURE D.1 – Taux de mortalité par sexe et groupe d'âges



On utilise le Tableau des taux de mortalité par sexe et par groupe d'âges de **l'ensemble de la population** : Hommes et Femmes.

Ce tableau est téléchargeable ici :

Taux de mortalité par sexe et par groupe d'âges : Tableau 67

On peut aussi mettre à disposition la table TGH05 :

Table TGH05

Annexe E

Documents de Towers Perrin :

On met à disposition du lecteur les fichiers de Towers Perrin :

- L'étude qu'ils ont publiés pour le compte l'UNESPA :

UNESPA : Longevity Risk Investigation

- La table GRM95 que Towers Perrin utilise :

Spanish Portuguese life tables

Annexe F

Code R :

Le code R dans sa version complète peut être téléchargé à l'adresse suivante, il est commenté ligne par ligne : il est encodé en ISO8859-1

Code R : Calibration du choc de longévité dans le cadre de l'ORSA

On propose ici un code R minimaliste avec les principales commandes :

PARTIE I : CALCUL DES COEFFICIENTS D'AMÉLIORATION DE LA MORTALITÉ :

```
#---- DEBUT de la Pondération des ratios de mortalité : #  
  
# On charge les librairies et les données dont on a besoin :  
  
library(car) # On utilise cette library pour la fonction "Recode"  
  
setwd("C:/Users/taha-pc/Desktop/M1- EURIA/M1 - Bureau D'étude")  
  
T=read.csv("Ratio_Mortalite2.csv",sep=";",header=TRUE)  
# Table de ratios de longévité INSEE  
T=data.matrix(T) # Pour être sûr de ne pas avoir de facteur  
  
P=read.csv("Pyramides_Ages.csv",sep=";",header=TRUE)  
P=P[,-(2:3)] # On enlève de la table des poids les âges 1975 et 1976  
P=data.matrix(P) # On met la table des poids sous forme Numeric  
  
Tcal=T[,-(1:2)] # Colonnes "année" et "ages" inutiles  
Pcal=P[, -1] # # Colonne indicat. ages inutile  
  
View(Pcal) ; View(Tcal)
```



```
# Calcul effectif de la pondération des poids :

R=matrix(0, nrow=18, ncol=30)
for(i in 1:18){
  for(j in 1:30){
    R[i,j]=Pcal[i,j]*Tcal[j,i]
  }
}

R=t(R) # Transpose : récupère Les années en colonnes.

row.names(R)=T[,1]
colnames(R)=colnames(T[,-(1:2)])

# Agrégation de la table :

Inf_50=apply(R[,1:11],1,sum)
Age50_60=apply(R[,12:13],1,sum)
Age60_70=apply(R[,14:15],1,sum)

Rcal=cbind(Inf_50,Age50_60,Age60_70,R[, (16:18)])

Ratio_Pond=Rcal # Table final pondéré.

Rcal=data.matrix(Rcal)

#---- FIN de la Pondération des ratios de mortalité --- #

#---- DEBUT : CALCUL DES COEFFICIENTS D'AMÉLIORATION ----#

# METHODE ANNUEL :

A=matrix(0, nrow = 30 , ncol = 6) # Car dim(R) = 30,6

for(i in 1:29){
  A[i,]=1-(Rcal[(i+1),]/Rcal[i,])
}

# METHODE TOWERS :

A=matrix(0, nrow = 6 , ncol = 6) # Car dim(R) = 30,6
```



```
for(i in 1:6){
  A[i,]=1-((Rcal[i+4*i,]/Rcal[(i-1)*4+i,])^(1/5)) #
}

# Agrégation de la Table des facteurs de longévité :

colnames(A)=c("Inf_50", "X50_59", "X60_69", "X70_79", "X80_89", "Plus_90")
View(A)

# moyenne et de la variance pour La table des Coefficients :

Moyenne=apply(A,2,mean)
Moyenne
Moyenne=as.matrix(Moyenne)
Variance=as.matrix(apply(A,2,sd))

Table=cbind(Moyenne,Variance)

colnames(Table)=c("Moyenne", "Variance")

Table=t(Table)

colnames(Table)=c("Inf_50", "X50_59", "X60_69", "X70_79", "X80_89", "Plus_90")

View(Table)

Facteurs_Pond=Table

#---- FIN : CALCUL DES COEFFICIENTS D'AMÉLIORATION ----#
```

PARTIE II : CALCUL DES TABLES PROJETÉES :

II-1 : PROJECTION TGH05 :

```
# Chargement des données :

R=read.csv("TGH05.csv",sep=";",header=TRUE) # TGH05
TowersTable=read.csv("Facteurs_Pond.csv",sep=";",header=TRUE) # Table des Coeffs.

# Calcul de la matrice global des Qx :

QX=(R[1:(nrow(R)-1),]-R[2:nrow(R),])/R[1:(nrow(R)-1),] # qx=lx-lx+1/lx
```



```
QX=QX[,-1]

age2=as.matrix(seq(0,120,1))
QX=cbind(age2,QX)
QX

for (j in 1:ncol(QX)){
  for (i in 1:nrow(QX)){
    if ( is.na(QX[i,j]) | QX[i,j]=="-Inf" ) # Suppression des -Inf
      QX[i,j]=0 # On remplace cette valeurs par un 0
  }
}

# View(QX) # Matrice des décès global :

----- Projection de la TGH05 -----

library(car)

k=rnorm(5000) # Simulation d'une loi normal N(0,1)

# Choix de la tranche d'age des assurées :

Qx_TG=as.matrix(QX$X1956) # qx de personnes ayant 40 ans en 1996.
Lx_TG=as.matrix(R$X1956) # lx en vie à l'age 40 ans en 1996.

Qx_TG=as.matrix(Qx_TG[Qx_TG[,1]>0]) # Nettoyage des qx
Lx_TG=as.matrix(Lx_TG[Lx_TG[,1]>0]) # Nettoyage des lx

# Notre référence est 2006, or la TGH05 est référencé
# pour 1996, on rajoute donc 10 ans :

qx_TG=as.matrix(Qx_TG[11:length(Qx_TG)]) # ligne 11 => +10 ans.
lx_TG=as.matrix(Lx_TG[11:length(Lx_TG)])

# Ce LxP_TG comporte l'effectif du début :

LxP_TG=rbind(lx_TG[1],as.matrix(rep(0,length(qx_TG))))
LxP_TG=cbind(LxP_TG,LxP_TG)

# Application du Modèle Stochastique avec les facteurs
# d'améliorations de la mortalité :

Age_u=121-length(Qx_TG[Qx_TG[,1]>0])+10 # Age de l'assuré.
```



```
mu_u=as.numeric(TowersTable[1,]) # Moyennes pour les 6 Tranches
Sigma_u=as.numeric(TowersTable[2,]) # Variances pour les 6 Tranches

Psi=rep(1,5000)

for (i in 1:nrow(qx_TG)){

  j=recode(Age_u,"0:49=1;50:59=2;60:69=3;70:79=4;80:89=5;
90:170=6",FALSE,TRUE)
  f_u=mu_u[j]+Sigma_u[j]*k

  Psi=(1-f_u)*Psi # Calcul du Psi en récurrence pour avoir le Produit

  LxP_TG[i+1,1]=mean(LxP_TG[i]*(1-(qx_TG[i,]*Psi)))
  LxP_TG[i+1,2]=sd(LxP_TG[i]*(1-(qx_TG[i,]*Psi)))

  Age_u=Age_u+1 # Notre assurée vieillit au fur et à mesure.
}

colnames(LxP_TG)=c("Moyenne","Variance")

LxP_TG=LxP_TG[-(nrow(qx_TG)+1),] # Dernière ligne car inopérante.

# View(cbind(LxP_TG[,1],lx_TG)) ; length(lx_TG) ; length(LxP_TG[,1])

# PROJECTION DE LA TABLE EN BRUT :

AgeTG=121-length(Qx_TG[Qx_TG[,1]>0])+10 # Age de l'assuré

AgeIndc=AgeTG # Sauvegarde de l'âge

LX_BRUT_TG=rep(0,5000)
LX_BRUT_TG1=rep(lx_TG[1],5000)

Psi=rep(1,5000)

for (i in 1:(nrow(qx_TG)-1)){

  j=recode(AgeIndc,"0:49=1;50:59=2;60:69=3;70:79=4;80:89=5;
90:170=6",FALSE,TRUE)

  f_u=mu_u[j]+Sigma_u[j]*k
```



```
Psi=(1-f_u)*Psi # Calcul du Psi en récurrence pour avoir le Produit
assign(paste("LX_BRUT_TG",i+1, sep=""),LxP_TG[i,1]*(1-(qx_TG[i]*Psi)))

AgeIndc=AgeIndc+1 # Notre assurée vieillit au fur et à mesure.

}
# On vérifie si les deux simulations nous donne la même valeur :

mean(LX_BRUT_TG2) ; LxP_TG[2] ; lx_TG[2]

# Vérification s'il y'a une amélioration de la mortalité :

# Nombres de personnes épargnés :

Chanceux_TG=mean(LxP_TG[,1]-lx_TG)
Chanceux_TG

# Comparaison entre les deux tables :

Age_Ite=as.matrix(seq(AgeTG, AgeTG+length(LxP_TG[,1])-1,1))
Compare_Table=cbind(Age_Ite, lx_TG, LxP_TG)
View(Compare_Table)

# VISUALISATION de l'amélioration avec la librairie ggplot2 :

library(ggplot2)

Data_TGH05=data.frame(Age=c(seq(AgeTG, AgeTG+length(LxP_TG[,1])-1,1),
seq(AgeTG, AgeTG+length(LxP_TG[,1])-1,1)),
                      LX=c(lx_TG, LxP_TG[,1]),
                      Effectifs=c(rep("Lx Base", length(LxP_TG[,1])),
rep("Lx Projected", length(LxP_TG[,1])))
)

p <- ggplot(Data_TGH05, aes(x=Age, y=LX, colour=Effectifs, shape=Effectifs ))
p <- p + geom_line(size=1)
p <- p + ggtitle("Table TGH05 Base VS TGH05 améliorée (50ans)")
p <- p + geom_point(size=1)
p

# NORMALITÉ de l'échantillon : En utilisant le Package ggplot2 :

df1 <- data.frame(Tab = LX_BRUT_TG15, Val=rnorm(5000))
```



```
# Tracé du Diagramme Quantile-Quantile :

library("gridExtra")

plo <- qqplot(sample = Tab, data = df1)
plo <- plo + stat_qq(distribution=qnorm, color="dodgerblue1", alpha=1)
+ geom_abline(intercept = mean(df1$Tab), slope = sd(df1$Tab))
plo <- plo + xlab("Quantiles Théoriques")
+ ylab("Quantiles de la table projetée")
plo <- plo + ggtitle("Diagramme Quantile-Quantile LX_Projected")
plo

# Tracé de l'histogramme de la Table Projeté :

g <- ggplot(df1, aes(x=Tab))
g <- g + geom_histogram(binwidth=1, color="Black",
  aes(y=..density.., fill=count), fill="lightblue1")
g <- g + scale_fill_gradient("Count", low="Black", high="Blue")
g <- g + stat_function(fun=dnorm, color="Black",
  args=list(mean=mean(df1$Tab),sd=sd(df1$Tab)))
g <- g + geom_density(color="firebrick1", alpha=.2, fill="lightcoral")
g <- g + xlab("Table Projetée") + ylab("Fréquence")
g <- g + geom_text(x=96085, y=0.01, label="Densité Table -->",
  color="firebrick1")
g <- g + geom_text(x=96090, y=0.015, label="Densité Théorique ->",
  color="Black")
g <- g + ggtitle("Histogramme LX_Projected")
g

grid.arrange(g , plo, ncol=2)
```

II-2 : PROJECTION TH002 :

```
# 1-Chargement des données :
```

```
TH=read.csv("TH0002.csv",sep="",header=TRUE) # TH002
TowersTable=read.csv("Facteurs_Pond.csv",sep=";",header=TRUE)
```

```
# 2-Calcul de la probabilité de Décès :
```

```
qxTH=(TH[1:(nrow(TH)-1),2]-TH[2:nrow(TH),2])/TH[1:(nrow(TH)-1),2]
qxTH=as.matrix(qxTH) # Probabilité de Décès
```



```
lxTH=as.matrix(TH[,2])

for (i in 1:nrow(qxTH)){
  if ( is.na(qxTH[i,1])){ sous forme NA
    qxTH[i,1]=0 # On remplace cette valeurs par un 0
  }
}

qxTH=as.matrix(qxTH[qxTH[,1]>0]) # Nettoyage des proba de décès :
lxTH=as.matrix(lxTH[lxTH[,1]>0]) # Nettoyage des proba de survie :

# PROJECTION EN MOYENNE :

muTH=as.numeric(TowersTable[1,]) # Moyennes pour les 6 Tranches
SigmaTH=as.numeric(TowersTable[2,]) # Variances pour les 6 Tranches

StochasticsProcess_TH=function(AgeTH){

kTH=rnorm(5000) # Loi Normal 5000 fois

AgeIndc=AgeTH #

# Ce LX comporte une cohorte des survivants à l'age x

LX_E=rbind(TH[AgeIndc+1,2],as.matrix(rep(0,nrow(qxTH))))
LX_V=rbind(0,as.matrix(rep(0,nrow(qxTH))))
LX=cbind(LX_E,LX_V)

Psi=rep(1,5000) # Initialisation du PSI pour le Produit

for (i in 1:(nrow(qxTH)-(AgeTH+1))){

  j=recode(AgeIndc,"0:49=1;50:59=2;60:69=3;70:79=4;80:89=5;
90:170=6",FALSE,TRUE)

  fTH=muTH[j]+SigmaTH[j]*kTH
  Psi=(1-fTH)*Psi # Calcul du Psi

  LX[i+1,1]=mean(LX[i]*(1-(qxTH[AgeTH+i,]*Psi)))
  LX[i+1,2]=var(LX[i]*(1-(qxTH[AgeTH+i,]*Psi)))

  AgeIndc=AgeIndc+1 # Notre assurée vieillit au fur et à mesure.
}
}
```



```
colnames(LX)=c("Moyenne", "Variance")

LX=LX[-(nrow(qxTH)+1),]

# On scinde LX_Ajout qui contient l'effectif
# des personnes non concerné par l'aamélioration
# de la mortalité et LX qui contient l'effectif de personnes
# dont la survie a été amélioré

LX_Ajout=cbind(lxTH[lxTH[,1]>lxTH[AgeTH+2]],as.matrix(rep(0,AgeTH+1)))
LX_Ajout
# On obtient enfin la combinaison des deux

LX_Projected=rbind(as.matrix(LX_Ajout),LX)
LX_Projected=LX_Projected[-(AgeTH+1),1:2] # Effectif redondant

return(LX_Projected)

}

# Fonction pour pouvoir projeter les effectifs avec la TH002 :

LX_Projected=StochasticsProcess_TH(50)

# View(LX_Projected)
# View(cbind(LX_Projected[,1],lxTH,LX_Projected[,2])) # Le gain.

# On effectue le Néttoyage de la table et extrapolation
# des effectifs Pour qu'ils ressemblent à ceux de la TGH05 :
# On applique une règle de trois.

LX_Projected_TH=c(LX_Projected[50],LX_Projected[,1]
[LX_Projected[,2]>0])
LXP_TH_Clear=LX_Projected_TH[2:length(LX_Projected_TH)]*
(lx_TG[1]/LX_Projected[50])

LXP_TH_Clear=c(lx_TG[1],LXP_TH_Clear)
# View(LXP_TH_Clear)

# VERIFICATION :

# Vérification entre la Table Base et la table projeté :
# Ecart de Personnes sauvé.
```



```
Data_TH=data.frame(Age=c(seq(1,111,1),seq(1,111,1)),
                    LX=c(lxTH,LX_Projected[1:nrow(lxTH),1]),
                    Effectifs=c(rep("Lx Base",111),rep("Lx Projected",111))
)

p <- ggplot(Data_TH, aes(x=Age, y=LX, colour=Effectifs, shape=Effectifs ))
p <- p + geom_line(size=1)
p <- p + geom_point(size=1)
p <- p + scale_color_manual(values=c("darkorchid4", "darkslategray3"))
p <- p + ggtitle("TH002 Base VS TH002 améliorée (50ans)")
p

# On peut conclure qu'il y'a effectivement moins de décès, celà est cohèrent.

# Nombres de personnes épargnés :

Chanceux_TH=mean(LX_Projected[1:nrow(lxTH),1]-lxTH)
Chanceux_TH=Chanceux_TH*lx_TG[1]/LX_Projected[50] # Coeff. d'extrapolation

# Comparaison entre les deux Tables :

Malibu=Chanceux_TG-Chanceux_TH # Différentiel de personnes sauvé :

# PROJECTION EN BRUT : Pour obtenir les 5000 Scénarios.

muTH=as.numeric(TowersTable[1,]) # Moyennes pour les 6 Tranches
SigmaTH=as.numeric(TowersTable[2,]) # Variances pour les 6 Tranches

AgeTH=50 # Ici on détermine l'age

kTH=rnorm(5000) # Simulation de la loi Normal 5000 fois

AgeIndc=AgeTH # On sauvegarde l'age pour le rendre constant
LX_I=TH[AgeIndc,2] # Survivants TH002 sur qui on projette

LX_Brut_=rep(0,5000)
Psi=rep(1,5000) # Initialisation du Psi pour le Produit

for (i in 1:(nrow(qxTH)-(AgeTH+1))){

  j=recode(AgeIndc,"0:49=1;50:59=2;60:69=3;70:79=4;80:89=5;
90:170=6",FALSE,TRUE)
```



```
fTH=muTH[j]+SigmaTH[j]*kTH
Psi=(1-fTH)*Psi # Calcul du Psi

assign(paste("LX_Brut_", AgeIndc+1, sep=""),
LX_Projected[AgeTH+i,1]*(1-(qxTH[(AgeTH+i),]*Psi)))

AgeIndc=AgeIndc+1 # Notre assurée vieillit au fur et à mesure.

}
```

PARTIE III : CALCUL DES CHOCS DE MORTALITE :

```
# 1 ---- First : Calculation of base mortality :

I_Base=matrix(0,nrow=length(lx_TG),ncol=1)

  for (i in 1:(length(lx_TG))){
    I_Base[i,1]=1-(lx_TG[i]/lx_TG[1])
  }

colnames(I_Base)=c("x_q_x+n")

# 2 ----- Second : Calculation of expected mortality :

I_Expected_N_TG=rep(0,5000) ; n=1 # For 5 years periods : x_q'_x+5
for(i in 1:(length(lx_TG))){
  assign(paste("I_Expected_N_TG",i, sep=""),
    1-(get(paste("LX_BRUT_TG",i,sep=""))/lx_TG[1]))
}

# 3 - calculate the mortality improvement factor :

IMPROVEMENT_N_TG=rep(0,5000) ;
for(i in 2:(length(lx_TG))){
  assign(paste("IMPROVEMENT_N_TG",i-1, sep=""),
    get(paste("I_Expected_N_TG",i,sep=""))/I_Base[i,n])
}

Plot_IMPROVE=rep(0,length(lx_TG))

for(i in 1:(length(lx_TG))){
  Plot_IMPROVE[i]=1-mean(get(paste("IMPROVEMENT_N_TG",i,sep="")))
}
```



```
}  
  
Age_Choc_N_X1976=data.frame(Durée=c(seq(1,length(Plot_IMPROVE)-1,1)),  
                             Chocs=Plot_IMPROVE[2:length(Plot_IMPROVE)],  
                             Âge=rep("X1926",length(Plot_IMPROVE)-1)  
)
```

PARTIE IV - RISK MEASURE

```
Agreg_5=c(IMPROVEMENT_N_TG5) #  
  
sort(Agreg_5,decreasing = FALSE)  
  
# Soit l'âge x = X ans pour une duration de n = 5 ans :  
  
# Intervalle de confiance " à la main " :  
  
Alpha=0.005           # Intervalle de confiance à 99.5%  
t=qnorm(1-Alpha/2)    # Quantile de loi normale  
  
n=length(Agreg_5)     # Taille de l'échantillon  
Moy=mean(Agreg_5)     # Moyenne  
S2=sd(Agreg_5)        # Variance Empirique  
  
Esup=Moy+t*S2/sqrt(n)  
Einf=Moy-t*S2/sqrt(n)  
  
IC=c(Einf,Esup) ; IC  
  
# Intervalle de confiance avec la fonction de R : t.test :  
  
IC_995=t.test(Agreg_5,conf.level=0.995)$conf.int # IC à 99.5%  
IC_95t=c(IC_995[2],IC_995[1])  
  
IC_95t  
  
IC_50=t.test(Agreg_5,conf.level=0.50)$conf.int # IC à 50%  
IC_50t=c(IC_50[2],IC_50[1])  
  
IC_50t  
  
# Mesure de risque : Age = 50 ans, Duration = 5 ans
```



```
Fm50_95t=IC_95t-IC_50t
Fm50_95t

(Fm50_95t[1]-Fm50_95t[2])
```

PARTIE V : CALCUL DU SCR :

V-1 : SCR ÉQUIVALENT :

```
#--- Chargements des données : ---#

C=read.csv("ZeroCoupon.csv",sep=";",header=TRUE,dec=",") # Courbe Taux :
# -- plot(C[,1],C[,3],type='l')
a=na.omit(C)[,5] # On ne récupère que la courbe des taux annuels

R_C=1200 # Rente de 1200 Euro ;
Alpha=0.03 # Frais de gestion

# ----- 1-1 - CALCUL DU BEST ESTIMATE - METHODE 99.5% -----#

h=1 ; i=0 ; n=50 ; a[0]=0 # Initialisation Avec n = durée, et a taux

for (h in 1:n){ # Calcul du flux actualisé BE_Expected
assign(paste("BE_Expected",h,sep=""),R_C*(1+Alpha)*
((1/(1+(a[h]100))^(h-1)))*(get(paste("LX_BRUT_TG",h,sep="")))/
get(paste("LX_BRUT_TG",1,sep="")))
}

BE_A_5=rep(0,5000)
BE_A_10=rep(0,5000)

for (i in 1:5000){ # Calcul Pour une duration 5ans :
BE_A_5[i]=sum(c(BE_Expected1[i],BE_Expected2[i],BE_Expected3[i],
BE_Expected4[i],BE_Expected5[i]))
}

for (i in 1:5000){ # Calcul Pour une duration de 10ans.
BE_A_10[i]=sum(c(BE_Expected1[i],BE_Expected2[i],BE_Expected3[i],
BE_Expected4[i],BE_Expected5[i],BE_Expected6[i],BE_Expected7[i],
BE_Expected8[i],BE_Expected9[i],BE_Expected10[i]))
}
```



```
# Cas général - Faire varier M (=Duration) Chaque Duration selon besoin :

BE_A=function(M){

  BE_A_=0

  for(h in 1:M){
    BE_A_=BE_A_+get(paste("BE_Expected",h,sep=""))
  }

  return(BE_A_)
}

BE_A_50=BE_A(15) # BEST ESTIMATE Avec DURATION = 15 ans

BE_A_50=sort(BE_A_50,decreasing = FALSE)
BE_A_50

# ----- 1-2 - CALCUL DU SCR - METHODE 99.5%

# ETAPE : Trie d'une façon croissante :

BE_A_5=sort(BE_A_5,decreasing=FALSE) # Duration à 5
BE_A_10=sort(BE_A_10,decreasing=FALSE) # Duration = 10
BE_A_15=sort(BE_A(15),decreasing=FALSE) # Duration = 15

# Calcul du SCR - EXEMPLE POUR QUELQUES SCR AVEC DURATION PARTICULIERE :

SCR_5=BE_A_5[4975]-BE_A_5[2500]
SCR_10=BE_A_10[4975]-BE_A_10[2500]
SCR_15=BE_A_15[4975]-BE_A_15[2500]

# Généralisation du Calcul du SCR avec DURATION Quelconque

SCR=function(M){

  SCR=0 # Initialisation du vecteur SCR à 0

  Q_BE=sort(BE_A(M),decreasing=FALSE) # TRIER selon croissant
  SCR=Q_BE[4975]-Q_BE[2500] # ETAPE 2 : BE_99.5% - BE_50%

  return(SCR)
}
```



```
SCR_A=rep(0,10) # SCR selon differents DURATION

for(i in 1:10){
  SCR_A[i]=SCR(i*5)
}

SCR_A # On obtient finalement un SCR "equivalent"
```

V-2 : SCR REGLEMENTAIRE :

```
# Chargement des données :

L=0 # Initialisation

Qx_TG=as.matrix(QX$X1976) ; Lx_TG=as.matrix(R$X1976)

Qx_TG=as.matrix(Qx_TG[Qx_TG[,1]>0])
Lx_TG=as.matrix(Lx_TG[Lx_TG[,1]>0])
qx_TG=as.matrix(Qx_TG[11:length(Qx_TG)])
lx_TG=as.matrix(Lx_TG[11:length(Lx_TG)])

L=(1-0.8*qx_TG[1:length(qx_TG),])*lx_TG[1:length(qx_TG),] # Lx Choqués
L=c(lx_TG[1],L) ; L=L[-length(L)]

# Calcul du BE_I : Un Best Estimate sans choc avec une Table TGH05

BE_Base_B=rep(0,5) ; n=5 # Initialisation ; Duration 5 ans

for(i in 1:5){ # Le BE_Base_B Intérieur de la somme
  BE_Base_B[i]=R_C*(1+Alpha)*((1/(1+(a[i]/100)))^(i-1))
  *(lx_TG[i]/lx_TG[1])
}

BE_I=sum(BE_Base_B) # Calcul effectif du Best Estimate BE_I
BE_I

# Calcul de BE_C : Un best Estimate avec un Choc de 80%

BE_Base_C=rep(0,5) ; n=5

for(i in 1:5){ # # Le BE_BASE_C ce qui l'intérieur de la Somme
```



```
BE_Base_C[i]=R_C*(1+Alpha)*((1/(1+(a[i]/100)))^(i-1))*(L[i]/L[1])
}

BE_C=sum(BE_Base_C) # Calcul effectif du Best Estimate BE_C
BE_C

# ----- 1-2 - CALCUL DU SCR - METHODE AVEC CHOC :

# Calcul du SCR - EXEMPLE POUR UN SCR AVEC DURATION = 5ans :

SCR_5_B=BE_C-BE_I
SCR_5_B

# Calcul du SCR - GENERALISATION Avec DURATION quelconque :

BE_B=function(M){

  BE_Base_B=0
  BE_Base_C=0

  for(i in 1:M){
    BE_Base_B=BE_Base_B+R_C*(1+Alpha)*((1/(1+(a[i]/100)))^(i-1))
    *(lx_TG[i]/lx_TG[1])
    BE_Base_C=BE_Base_C+R_C*(1+Alpha)*((1/(1+(a[i]/100)))^(i-1))
    *(L[i]/L[1])
  }

  return(c(BE_Base_B, BE_Base_C))
}

rbind(BE_B(5), BE_B(10), BE_B(15), BE_B(20), BE_B(25))

SCR_B=rep(0, 10)

for(i in 1:10){
  SCR_B[i]=BE_B(i*5)[2]-BE_B(i*5)[1]
}

SCR_A_X1976=SCR_A
SCR_B_X1976=SCR_B

SCR_A # SCR Équivalent
SCR_B # SCR Réglementaire
```

